

SÉRIE A, N° 4267

N° D'ORDRE : 5118

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

LAMEAU Jean

1^{re} THÈSE. — « Contribution à l'étude de l'induction
électromagnétique en théorie non
linéaire ».

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 12 mai 1964 devant la Commission d'examen

M. LICHNEROWICZ	<i>Président.</i>
Mmes TONNELAT	{ <i>Examineurs.</i>
CHOQUET-BRUHAT	

Éditions de la *Revue d'Optique théorique et instrumentale*

3 et 5, boulevard Pasteur — 165, rue de Sèvres

PARIS (15^e)

1965

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

Nom du Candidat : LAMEAU

Prénom : Jean

Date de la soutenance : 12 mai 1964

Numéro d'ordre : Série A, 4267, N° 5118

1

LAMEAU (Jean). — Contribution à l'étude de l'induction électromagnétique en théorie non linéaire. — *Paris*, Editions de la Revue d'Optique, 1965, 24 p.

Th. Sciences Mathématiques, Paris, 1965. Série A, 4267, N° 5118.

2

LAMEAU (Jean). — Contribution à l'étude de l'induction électromagnétique en théorie non linéaire. — *Paris*, Editions de la Revue d'Optique, 1965, 24 p.

Th. Sciences Mathématiques, Paris, 1965. Série A, 4267, N° 5118.

3

LAMEAU (Jean). — Contribution à l'étude de l'induction électromagnétique en théorie non linéaire. — *Paris*, Editions de la Revue d'Optique, 1965, 24 p.

Th. Sciences Mathématiques, Paris, 1965. Série A, 4267, N° 5118.

4

LAMEAU (Jean). — Contribution à l'étude de l'induction électromagnétique en théorie non linéaire. — *Paris*, Editions de la Revue d'Optique, 1965, 24 p.

Th. Sciences Mathématiques, Paris, 1965. Série A, 4267, N° 5118.





Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552205_0063

SÉRIE A, N° 4267

N° D'ORDRE : 5118

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

LAMEAU Jean

1^{re} THÈSE. — « Contribution à l'étude de l'induction
électromagnétique en théorie non
linéaire ».

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 12 mai 1964 devant la Commission d'examen

M. LICHNEROWICZ	<i>Président.</i>
Mmes TONNELAT	{ <i>Examineurs.</i>
CHOQUET-BRUHAT	

Éditions de la Revue d'Optique théorique et instrumentale

3 et 5, boulevard Pasteur — 165, rue de Sèvres

PARIS (15^e)

1965



FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen M. ZAMANSKY

G. JULIA	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	ULRICH	T	Physiologie végétale appl.
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparée.	MARÉCHAL	T	Optique théor. et appl.
GRASSÉ	T	Evolution des êtres organisés.	KIRRMANN	T	Théories chimiques.
PRÉVOST	T	Chimie organique.	CHAPELLE	T	Botanique.
WYART	T	Minéralogie et Cristal.	M ^{lle} LE BRETON	T	Physiol. de la nutrition.
TEISSIER	T	Zoologie.	LELONG	T	Application de l'analyse à la géométrie.
MANGENOT	T	Biologie Vég. (Orsay).	DEVILLERS	T	Anatomie et Histol. Comp.
AUGER	T	Physique quantique et Relativité.	EHRESMANN	T	Topologie algébrique.
MONNIER	T	Physiologie générale.	FRANÇON	T	Physique (S. P. C. N.).
PIVETEAU	T	Paléontologie.	GLANGEAUD	T	Géographie Phys. et Géol.
ROCARD	T	Physique (E. N. S.).	GODEMENT	T	Mathématiques (M. G. P.).
CARTAN	T	Mathématiques (E. N. S.).	PISOT	T	Tech. Mathém. de la Phys.
LAFFITTE	T	Chimie générale.	ROCH	T	Géologie.
FAVARD	T	Géométrie supérieure.	SCHATZMANN	T	Astrophysique.
COULOMB	T	Physique du Globe.	TERMIER	T	Géologie générale.
M ^{lle} COUSIN	T	Biologie animale (S. P. C. N.).	ZAMANSKY	T	Mathématiques générales.
CHRÉTIEN	T	Chimie minérale.	LENNUIER	T	Physique (M. G. P.).
DRACH	T	Zoologie.	RIZET	T	Génétique (Orsay).
KASTLER	T	Physique (E. N. S.).	ROUTHIER	T	Géologie appliquée.
EPHRUSSI	T	Génétique.	M ^{me} TONNELAT	T	Physique théorique.
RIVIÈRE	T	Géologie S. P. C. N. et Sédimentologie (Orsay).	DIXMIER	T	Mathématiques (M. P. C.).
GAUTHERET	T	Biologie Vég. (P. C. B.).	SOUCHAY	T	Chimie générale.
LUCAS R.	T	Recherches Physiques.	AIGRAIN	T	Electrotechnique gén.
THOMAS A.	T	Biologie cellulaire.	BRUSSET	T	Chimie systématique.
ARNULF	T	Optique appliquée.	M. LEVY	T	Physique théorique des hautes énergies (Orsay).
MORAND	T	Physique Enseignement.	M ^{me} CHAIX	T	Chimie biologique.
SOLEILLET	T	Physique (P. C. B.).	M ^{me} HUREL-PY	T	Biologie végétale (P. C. B.).
FORTIER	T	Mécanique Exp. des Fluides.	PIAUX	T	Chimie (M. P. C.).
PETIT	T	Biologie maritime.	BRUN	T	Mécanique théorique des fluides.
QUENEY	T	Météorologie et dynamique atmosphérique.	LEDERER	T	Chimie biologique (Orsay).
GALLIEN	T	Embryologie.	M ^{me} DUBREIL	T	Mathématiques (Agrég.).
EICHORN	T	Botanique.	M ^{me} LE LONG	T	Mathématiques II (E. N. S.).
DE CUGNAC	T	Biologie Vég. (S. P. C. N.).	BELLAIR	T	Géologie (S. P. C. N.).
M ^{lle} CAUCHOIS	T	Chimie Physique.	COTTE	T	Physique électricité.
THELLIER	T	Physique du Globe.	DUBOIS J. E.	T	Chimie organique.
L'HÉRITIER	T	Biologie Générale (Orsay).	LAMOTTE	T	Zoologie (E. N. S.).
GRIVET	T	Radioélectricité (Orsay).	MICHEL A.	T	Chimie minérale (Orsay).
PONCIN	T	Mécanique générale.	OLMER	T	Energétique générale.
DUBREIL	T	Arithm. et Théorie des Nombres.	ROUAULT	T	Electricité (Orsay).
QUELET	T	Chimie Organique.	GAUTHIER	T	Mécanique appliquée.
CAGNIARD	T	Géophysique appliquée.	BARCHEWITZ	T	Chimie Physique.
CHAMPETIER	T	Chimie macromoléculaire.	BROSSEL	T	Physique atomique.
CUVILLIER	T	Micropaléontologie.	BUSER	T	Physiologie comparée.
JUNG	T	Géologie.	CAMUS	T	Physiol. Végétale (Orsay).
TRILLAT	T	Microscopie et diffraction électronique.	CASTANG	T	Physique II Thermod. Orsay.
WIEMANN	T	Chimie organique et struc.	CURIEN	T	Minéralo. et Cristallog.
JACQUINOT	T	Spectroscopie et Physique céleste (Orsay).	MOYSE	T	Physiologie végét. (Orsay).
VASSY	T	Physique de l'Atmosphère.	NOIROT	T	Evolution des Etres Org.
DESTOUCHES	T	Théories Physiques.	PANNETIER	T	Chimie générale.
AMIEL	T	Chimie générale.	POSSOMPES	T	Zoologie.
HOCART	T	Minéralogie et Cristallog.	PULLMANN	T	Chimie quantique.
J. P. MATHIEU	T	Physique Optique.	TEILLAC	T	Physique Nucl. et Radioactivité (Orsay).
COUTEAUX	T	Cytologie.	TONNELAT	T	Biol. Physico-chim. (Orsay).
MAY	T	Zoologie (Orsay).	VILLE	T	Econométrie.
CHOQUET	T	Théorie des fonctions et Topologie.	WILLEMART	T	Chimie (P. C. B.).
FELDMANN	T	Biologie Végét. marine.	DODE	T	Chimie (Orsay).
GUINIER	T	Physique des Solides (Orsay).	FREYMANN	T	Recherches Physiques.
JOST	T	Physiologie comparée.	GUINCHET	T	Biol. vég. S. P. C. N. (Orsay).
FORTET	T	Calcul des Probabilités et Physique mathématique.	ROLLET	T	Chimie minérale.
SCHWARTZ	T	Calcul diff. et Intégral.	M ^{lle} JOSIEN	T	Chimie S. P. C. N.
CHOUARD	T	Physiologie végétale.	CHEVALLEY	T	Géométrie algéb. et théorie des groupes.
MALAVARD	T	Aviation (Techn. Aéronaut.).	ARNOULT	T	Electronique (Orsay).
BRELOT	T	Calcul diff. et intégral.	CHAPELLE	T	Physique I (Orsay).
NORMANT	T	Synthèse organique.	DELANGE	T	Mathématiques I (Orsay).
BENARD	T	Chimie minérale.	DENY	T	Mathématiques Gén. Orsay.
BUVAT	T	Botanique (E. N. S.).	GERMAIN	T	Mécanique théor. des fluides.
DUGUE	T	Statistiques Mathématiques.	LUCAS G.	T	Géologie.
SOULAIRAC	T	Psychophysiologie.	ALLARD	T	Chimie Physique.
			BERTHELOT	T	Phys. des particules Fond. (Orsay).
			BRICARD	T	Météor. et Phys. de l'Atmosphère.
			M ^{me} ALBE-FESSARD	T	Psychophysiologie.

(suite en dernière page)

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DE L'INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE EN THÉORIE NON LINÉAIRE

PAR

Jean LAMEAU

INTRODUCTION

Nous étudions quelques problèmes relatifs aux théories électromagnétiques du type Born & Infeld.

Dans le chapitre I, après avoir rappelé le formalisme général de ces théories, nous discutons, dans le cadre de la relativité générale, le choix du tenseur d'impulsion-énergie et étudions le problème des équations du mouvement d'une particule chargée. Au chapitre II, nous étudions le problème de Cauchy relatif aux équations du champ et la propagation des ondes de discontinuité, toujours dans le cadre de la relativité générale. Dans le chapitre III, nous établissons la solution à symétrie sphérique des équations du champ électromagnétique, ainsi que celle des équations d'Einstein où nous prenons comme tenseur d'impulsion-énergie celui que nous avons obtenu au chapitre I. Au chapitre IV, nous établissons les équations aux variations du champ électromagnétique, ainsi que celles du champ de gravitation. Le chapitre V est consacré à l'étude de la généralisation de deux théories non linéaires particulières, la théorie de Born & Infeld et la théorie d'Infeld & Hoffmann. Enfin, le chapitre VI est consacré à une tentative de quantification des théories électromagnétiques non linéaires.

I. Formalisme général. Tenseur d'impulsion-énergie

La théorie de Born & Infeld fut développée en 1934 et avait pour but de représenter les sources du champ électromagnétique comme de très petits domaines où ce champ aurait une très grande intensité, sans présenter cependant de singularité. Toutefois la théorie de Born & Infeld n'est pas la seule théorie électromagnétique non linéaire possible. Aussi développerons-nous le formalisme général des théories électromagnétiques déduites des hypothèses suivantes :

a) le champ électromagnétique, comme en théorie de Maxwell, est représenté par un tenseur antisymétrique du second ordre $s_{\mu\nu}$ qui dérive d'un potentiel-quadrivecteur φ_μ :

$$s_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi_\nu - \partial_\nu \varphi_\mu ;$$

b) les équations du champ électromagnétique dérivent d'un principe variationnel appliqué à un lagrangien $L(F, G)$ qui ne dépend que des deux invariants fondamentaux

$$(I.4) \quad \begin{aligned} F &= \frac{1}{2} s_{\mu\nu} s^{*\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} s_{\mu\nu} s_{\rho\sigma}, \\ G &= \frac{1}{4} s_{\mu\nu} s^{*\mu\nu} = \frac{1}{8\sqrt{-g}} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} s_{\mu\nu} s_{\rho\sigma} = \sqrt{\frac{s}{-g}}, \end{aligned}$$

$g_{\mu\nu}$ étant la métrique de l'espace-temps, g le déterminant des $g_{\mu\nu}$, s le déterminant des $s_{\mu\nu}$, $s^{*\mu\nu}$ le tenseur adjoint de $s_{\mu\nu}$ défini par l'égalité

$$(I.2) \quad s^{*\mu\nu} = \frac{1}{2\sqrt{-g}} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} s_{\rho\sigma};$$

c) pour des champs de faible intensité, les équations du champ électromagnétique se réduisent approximativement aux équations de Maxwell du vide.

Born & Infeld ont développé les calculs en supposant l'espace minkowskien et en spécifiant la forme de L en fonction de F et de G . Nous développerons les calculs dans le cadre de la théorie de la relativité générale.

1. **Equations du champ.** — Elles s'obtiennent à partir du principe variationnel

$$(I.3) \quad \delta \int L(F, G) \sqrt{-g} d\tau = 0.$$

D'où

$$\int \left(\frac{\partial L}{\partial F} \delta F + \frac{\partial L}{\partial G} \delta G \right) \sqrt{-g} d\tau = 0$$

et, d'après (I.1),

$$(I.4) \quad \int \left(g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \frac{\partial L}{\partial F} + \frac{1}{4\sqrt{-g}} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \frac{\partial L}{\partial G} \right) s_{\mu\nu} \delta s_{\rho\sigma} \sqrt{-g} d\tau = 0.$$

Comme $s_{\rho\sigma}$ dérive du potentiel-quadrivecteur φ_ρ , on a

$$\delta s_{\rho\sigma} = \partial_\rho(\delta\varphi_\sigma) - \partial_\sigma(\delta\varphi_\rho).$$

Reportons dans (I.4); après intégration par parties et simplification, on obtient

$$\int \delta\varphi_\sigma \partial_\rho \left[\sqrt{-g} s_{\mu\nu} \left(g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \frac{\partial L}{\partial F} + \frac{1}{4\sqrt{-g}} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \frac{\partial L}{\partial G} \right) \right] d\tau = 0.$$

D'où, les quatre variations $\delta\varphi_\sigma$ étant indépendantes et quelconques,

$$\partial_\rho \left[\sqrt{-g} s_{\mu\nu} \left(g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \frac{\partial L}{\partial F} + \frac{1}{4\sqrt{-g}} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \frac{\partial L}{\partial G} \right) \right] = 0;$$

d'où, d'après (I.2),

$$\partial_\rho \left[\sqrt{-g} \left(s^{\rho\sigma} \frac{\partial L}{\partial F} + \frac{1}{2} s^{*\rho\sigma} \frac{\partial L}{\partial G} \right) \right] = 0.$$

En posant

$$(I.5) \quad p^{\rho\sigma} = \frac{\partial L}{\partial F} s^{\rho\sigma} + \frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial G} s^{*\rho\sigma},$$

on met les équations du champ sous la forme

$$(I.6) \quad \partial_\rho(\sqrt{-g} p^{\rho\sigma}) = 0$$

ou, $p^{\rho\sigma}$ étant un tenseur antisymétrique,

$$(I.7) \quad \nabla_\rho p^{\rho\sigma} = 0.$$

On vérifie facilement que

$$(I.8) \quad p^{\mu\nu} = \partial L / \partial s_{\mu\nu}.$$

De plus, $s_{\mu\nu}$ dérivant d'un potentiel-quadrivecteur, on a

$$(I.9) \quad \nabla_\rho s^{*\rho\sigma} = 0.$$

2. Tenseur d'impulsion-énergie. — On peut l'obtenir de deux manières. Employons d'abord un calcul très simple semblable à celui qu'utilisent Born & Infeld dans [1].

L'équation (I.9) entraîne

$$\nabla_{\mu} s_{\nu\rho} + \nabla_{\nu} s_{\rho\mu} + \nabla_{\rho} s_{\mu\nu} = 0.$$

Multiplions cette dernière équation par $-\frac{1}{2}\sqrt{-g}p^{\mu\nu}$. Compte tenu des équations de champ (I.7), on obtient

$$-\frac{1}{2}[\nabla_{\mu}(\sqrt{-g}p^{\mu\nu}s_{\nu\rho}) + \nabla_{\nu}(\sqrt{-g}p^{\mu\nu}s_{\rho\mu}) + \sqrt{-g}p^{\mu\nu}\nabla_{\rho}s_{\mu\nu}] = 0.$$

D'où, en raison de l'antisymétrie de $p^{\mu\nu}$ et $s_{\mu\nu}$, et d'après (I.8),

$$-\nabla_{\mu}(\sqrt{-g}p^{\mu\nu}s_{\nu\rho}) - \frac{1}{2}\sqrt{-g}\frac{\partial L}{\partial s_{\mu\nu}}\nabla_{\rho}s_{\mu\nu} = 0$$

ou

$$\nabla_{\mu}(-p^{\mu\nu}s_{\nu\rho} - \frac{1}{2}L\delta_{\rho}^{\mu}) = 0.$$

On peut donc prendre, comme tenseur d'impulsion-énergie, l'expression

$$(I.10) \quad T^{\mu}_{\nu} = -p^{\mu\sigma}s_{\sigma\nu} - \frac{1}{2}L\delta_{\nu}^{\mu}.$$

On peut aussi déduire cette expression du principe variationnel suivant :

$$(I.11) \quad \delta \int [R - 2\Lambda - \chi L(F, G)] \sqrt{-g} d\tau = 0;$$

R est le scalaire de courbure, Λ la constante cosmologique, χ la constante de gravitation.

Lorsqu'on fait varier seulement le champ électromagnétique $s_{\mu\nu}$ dans (I.11), le terme $R - 2\Lambda$ ne donne rien et l'on obtient les équations de champ (I.6). Par contre, lorsqu'on fait varier seulement le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$, le terme $R - 2\Lambda$ apporte au premier membre de (I.11) la contribution

$$\int (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu}) \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d\tau \equiv \int S_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d\tau.$$

La variation de L apporte la contribution $-\chi \int \delta(L\sqrt{-g}) d\tau$ qui, après un calcul simple, se met sous la forme

$$-\chi \int \left[-\frac{1}{2} \left(L - G \frac{\partial L}{\partial G} \right) g_{\nu\sigma} + \frac{\partial L}{\partial F} g^{\mu\rho} s_{\mu\nu} s_{\rho\sigma} \right] \sqrt{-g} \delta g^{\nu\sigma} d\tau.$$

Au total, la variation de $g_{\mu\nu}$ donne l'équation

$$(I.12) \quad S_{\nu\sigma} = \chi \left[-\frac{1}{2} \left(L - G \frac{\partial L}{\partial G} \right) g_{\nu\sigma} + \frac{\partial L}{\partial F} s^{\rho}_{\nu} s_{\rho\sigma} \right].$$

D'après les principes fondamentaux de la relativité générale, on voit donc que le tenseur d'impulsion-énergie du champ électromagnétique est

$$(I.13) \quad T_{\nu\sigma} = -\frac{1}{2} \left(L - G \frac{\partial L}{\partial G} \right) g_{\nu\sigma} + \frac{\partial L}{\partial F} s^{\rho}_{\nu} s_{\rho\sigma}.$$

Un calcul simple montre que les tenseurs d'impulsion-énergie donnés par les équations (I.10) et (I.13) sont égaux.

3. Equations du mouvement. — Deux interprétations physiques de la théorie sont possibles.

Dans la première, on admet que les charges électriques, sources du champ électromagnétique, ne sont pas distinctes du champ lui-même ; elles sont seule-

ment de petits domaines stables où l'énergie électromagnétique est très fortement concentrée.

Dans la seconde, on considère, comme en théorie de Maxwell, les particules chargées comme des objets entièrement distincts du champ ; dans ce cas, il faut mettre dans le second membre des équations de champ (I.6) ou (I.7) un terme de courant ; on aura alors

$$(I.14) \quad \nabla_\rho p^{\rho\sigma} = J^\sigma.$$

Ces nouvelles équations peuvent se déduire d'un principe variationnel ; pour cela, il suffit d'ajouter au lagrangien $L(F, G)$ le terme $2 \varphi_\mu J^\mu$.

Nous allons établir les équations du mouvement d'une particule chargée en nous plaçant dans le cadre de la deuxième interprétation. Pour cela, considérons un fluide du genre matière pure, formé de particules chargées dont chacune est la source d'un champ électromagnétique du type que nous venons d'étudier.

Nous désignerons par u^μ la quadrivitesse d'Univers du fluide, par ρ la densité de masse invariante, par τ^μ_ν le tenseur d'impulsion-énergie du champ électromagnétique seul, réservant la notation T^μ_ν pour le tenseur d'impulsion-énergie totale.

D'après le principe de conservation de l'impulsion-énergie, on a

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu \equiv \nabla_\mu (\tau^\mu_\nu + \rho u^\mu u_\nu) = 0.$$

D'où, d'après (I.10),

$$\nabla_\mu (-p^{\mu\sigma} s_{\sigma\nu} - \tfrac{1}{2} L \delta^\mu_\nu + \rho u^\mu u_\nu) = 0$$

et, compte tenu de (I.14),

$$-J^\sigma s_{\sigma\nu} + p^{\sigma\mu} \nabla_\mu s_{\sigma\nu} - \tfrac{1}{2} \partial_\nu L + \nabla_\mu (\rho u^\mu u_\nu) = 0.$$

Le deuxième terme de cette équation est annulé par le troisième. En effet, on a d'après (I.9) et (I.8)

$$\begin{aligned} p^{\sigma\mu} \nabla_\mu s_{\sigma\nu} &= \tfrac{1}{2} (p^{\sigma\mu} \nabla_\mu s_{\sigma\nu} + p^{\mu\sigma} \nabla_\sigma s_{\mu\nu}) = \tfrac{1}{2} p^{\sigma\mu} (\nabla_\mu s_{\sigma\nu} + \nabla_\sigma s_{\nu\mu}) \\ &= -\tfrac{1}{2} p^{\sigma\mu} \nabla_\nu s_{\mu\sigma} = \tfrac{1}{2} (\partial L / \partial s_{\mu\sigma}) \nabla_\nu s_{\mu\sigma} = \tfrac{1}{2} \partial_\nu L. \end{aligned}$$

On a donc finalement

$$(I.12) \quad \nabla_\mu (\rho u^\mu u_\nu) = J^\sigma s_{\sigma\nu}.$$

On retrouve donc la même loi de mouvement qu'en théorie de Maxwell. Le courant se réduisant à un courant de convection, on a

$$(I.13) \quad J^\sigma = \mu u^\sigma.$$

Portons (I.13) dans (I.12) et multiplions par u^ν . On trouve facilement l'équation de conservation

$$(I.14) \quad \nabla_\mu (\rho u^\mu) = 0,$$

puis

$$(I.15) \quad \rho u^\mu \nabla_\mu u_\nu + \mu u^\sigma s_{\sigma\nu} = 0.$$

Si toutes les particules du fluide sont identiques, on a $\mu/\rho = e/m$ (rapport de la charge à la masse).

Donc, d'après (I.15),

$$(I.16) \quad u^\mu \nabla_\mu u_\nu + (e/m) u^\sigma s_{\sigma\nu} = 0.$$

On sait [2] que cette équation a pour conséquence que les trajectoires dans l'espace-temps des particules chargées sont les géodésiques de

$$(I.17) \quad ds = (g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)^{1/2} + (e/m) \varphi_\mu dx^\mu.$$

Cette propriété des trajectoires des particules chargées en théorie de Maxwell —

qui a servi de point de départ à la théorie de Jordan et Thiry — se retrouve donc dans toutes les théories électromagnétiques non linéaires du type Born & Infeld.

4. Libre courant, libre densité de charge. — Nous avons vu que l'une des interprétations possibles de la théorie consiste à admettre que les charges électriques, sources du champ électromagnétique, ne sont pas distinctes du champ lui-même. Dans ce cas, on est amené [2] à définir une « libre densité de charge » ρ et un « libre courant » $\vec{j}$ qui ne sont pas des fonctions données des coordonnées, mais qui sont fonctions des grandeurs de champ. La densité de courant est définie par l'égalité

$$(I.18) \quad \sqrt{-g} j^\mu = \frac{1}{4\pi} \partial_\rho (\sqrt{-g} s^{\mu\rho}).$$

Les quadrivecteurs $\partial_\rho (\sqrt{-g} p^{\mu\rho})$ et $\partial_\rho (\sqrt{-g} s^{\mu\rho})$ sont nuls, d'après les hypothèses fondamentales de la théorie, et ne peuvent être utilisés pour définir une densité de courant. Nous verrons plus loin qu'en intégrant dans tout l'espace l'expression (I.18), dans le cas particulier de la solution statique à symétrie sphérique, on obtient une valeur qui caractérise la charge de la particule.

Remarquons qu'il ne faut pas confondre ce courant j^μ avec le courant J^μ qui intervient dans la détermination des équations du mouvement.

II. Propagation des ondes de discontinuité

Nous allons, dans ce chapitre, étudier le problème de Cauchy et les variétés caractéristiques des équations des théories électromagnétiques du type Born & Infeld.

Mettons d'abord les équations du champ électromagnétique sous une forme un peu différente de (I.7). Nous avons, d'après (I.7), $\nabla_\rho p^{\rho\sigma} = 0$; d'où, d'après la relation non linéaire entre champ et induction (I.5),

$$(II.1) \quad \nabla_\rho \left(\frac{\partial L}{\partial F} s^{\rho\sigma} + \frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial G} s^{*\rho\sigma} \right) = 0.$$

D'où, compte tenu de la relation $\nabla_\rho s^{\rho\sigma} = 0$,

$$\partial_\rho \left(\frac{\partial L}{\partial F} \right) s^{\rho\sigma} + \frac{\partial L}{\partial F} \nabla_\rho s^{\rho\sigma} + \frac{1}{2} \partial_\rho \left(\frac{\partial L}{\partial G} \right) s^{*\rho\sigma} = 0$$

ou

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial F^2} s^{\rho\sigma} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L}{\partial F \partial G} s^{*\rho\sigma} \right) \partial_\rho F + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial F \partial G} s^{\rho\sigma} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L}{\partial G^2} s^{*\rho\sigma} \right) \partial_\rho G + \frac{\partial L}{\partial F} \nabla_\rho s^{\rho\sigma} = 0.$$

Compte tenu des relations $\partial_\rho F = s^{\mu\nu} \nabla_\rho s_{\mu\nu}$ et $\partial_\rho G = \frac{1}{2} s^{*\mu\nu} \nabla_\rho s_{\mu\nu}$, on peut mettre cette équation sous la forme

$$(II.2) \quad K^{\mu\nu, \rho\sigma} \nabla_\rho s_{\mu\nu} = 0,$$

avec

$$(II.3) \quad K^{\mu\nu, \rho\sigma} = \frac{\partial^2 L}{\partial F^2} s^{\mu\nu} s^{\rho\sigma} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L}{\partial F \partial G} (s^{\mu\nu} s^{*\rho\sigma} + s^{*\mu\nu} s^{\rho\sigma}) + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 L}{\partial G^2} s^{*\mu\nu} s^{*\rho\sigma} + \frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial F} (g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} - g^{\rho\nu} g^{\sigma\mu}).$$

Le tenseur $K^{\mu\nu,\rho\sigma}$ ne dépend que du champ $s^{\mu\nu}$ (et de $g^{\mu\nu}$) et possède les symétries suivantes

$$(II.4) \quad K^{\mu\nu,\rho\sigma} = -K^{\nu\mu,\rho\sigma} = -K^{\mu\nu,\sigma\rho} = K^{\sigma\rho,\mu\nu}.$$

1. **Variétés caractéristiques.** — Nous nous proposons maintenant, toujours dans le cadre de la relativité générale, de déterminer les variétés caractéristiques du système d'équations

$$\begin{cases} (II.2) & K^{\mu\nu,\rho\sigma} \nabla_\rho s_{\mu\nu} = 0, \\ (II.5) & \nabla_\rho s^{\mu\nu} = 0. \end{cases}$$

Les hypothèses de dérivabilité des champs $g_{\mu\nu}$ et $s_{\mu\nu}$ sont les suivantes :

a) $s_{\mu\nu}$ est supposé continu, $\partial_\rho s_{\mu\nu}$ peut avoir des discontinuités finies sur certaines hypersurfaces ;

b) $g_{\mu\nu}$ et $\partial_\rho g_{\mu\nu}$ sont supposées continues, $\partial_\rho g_{\mu\nu}$ peut avoir des discontinuités finies sur certaines hypersurfaces.

Supposons donc que les $\partial_\rho s_{\mu\nu}$ sont discontinues sur une certaine hypersurface S d'équation

$$(II.6) \quad f(x^\alpha) = 0.$$

D'après les conditions de compatibilité de Hadamard et d'après nos hypothèses de dérivabilité, on a, les crochets représentant les discontinuités et $\sigma_{\sigma\tau}$ le tenseur de discontinuité,

$$(II.7) \quad [\nabla_\rho s_{\sigma\tau}] = [\partial_\rho s_{\sigma\tau}] = \sigma_{\sigma\tau} l_\rho \quad (l_\rho = \partial_\rho f).$$

Reportons (II.7) dans les équations de champ (II.2) et (II.5). $K^{\mu\nu,\rho\sigma}$, ne dépendant que de $s_{\mu\nu}$ et $g_{\mu\nu}$, est continu à la traversée de S . Donc, puisque (II.5) peut s'écrire $\nabla_\mu s_{\nu\rho} = 0$, on a

$$(II.8) \quad K^{\mu\nu,\rho\sigma} [\nabla_\nu s_{\rho\sigma}] = 0, \quad \nabla_\mu s_{\nu\rho} = 0;$$

d'où

$$(II.9) \quad \begin{cases} a) & K^{\mu\nu,\rho\sigma} \sigma_{\rho\sigma} l_\nu = 0, \\ b) & \nabla_\mu s_{\nu\rho} l_\mu = 0. \end{cases}$$

Nous avons 8 équations concernant les 6 composantes du tenseur antisymétrique de discontinuité $\sigma_{\mu\nu}$ et nous devons chercher les conditions que doivent satisfaire $K^{\mu\nu,\rho\sigma}$ et l_μ pour que $\sigma_{\mu\nu} \neq 0$, ce qui nous donnera les variétés caractéristiques. Il est commode pour cela d'introduire le potentiel-vecteur φ_μ .

Le tenseur $s_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi_\nu - \partial_\nu \varphi_\mu$ est continu, même sur S .

Les tenseurs φ_μ et $\partial_\mu \varphi_\nu$ seront donc continus et l'on aura pour les dérivées secondes de φ_μ les conditions de Hadamard

$$(II.10) \quad [\partial_\mu \varphi_\nu] = \Phi_\nu l_\mu.$$

Compte tenu de (II.7) et (II.10), on a finalement

$$\begin{aligned} [\nabla_\mu s_{\nu\rho}] &= [\partial_\rho s_{\mu\nu}] = [\partial_\rho (\partial_\mu \varphi_\nu - \partial_\nu \varphi_\mu)] \\ &= [\partial_\rho \partial_\mu \varphi_\nu] - [\partial_\rho \partial_\nu \varphi_\mu] = \Phi_\nu l_\rho l_\mu - \Phi_\mu l_\rho l_\nu \equiv \sigma_{\mu\nu} l_\rho. \end{aligned}$$

D'où

$$(II.11) \quad \sigma_{\mu\nu} = \Phi_\nu l_\mu - \Phi_\mu l_\nu.$$

Reportons dans (II.9a). On a

$$(II.12) \quad K^{\mu\rho,\sigma\tau} l_\rho (\Phi_\tau l_\sigma - \Phi_\sigma l_\tau) = 0.$$

D'où, compte tenu de l'antisymétrie de $K^{\mu\rho,\sigma\tau}$,

$$(II.13) \quad K^{\mu\rho,\sigma\tau} l_\rho l_\sigma \Phi_\tau = 0.$$

Pour que les Φ_τ ne soient pas tous nuls, il faut donc que

$$(II.14) \quad \Delta \equiv \det[K^{\mu\rho,\sigma\tau} l_\rho l_\sigma] = 0.$$

Il est maintenant nécessaire de faire une remarque sur une conséquence de l'invariance de jauge de la théorie.

Effectuons une transformation de jauge

$$\varphi_\mu \rightarrow \varphi'_\mu = \varphi_\mu + \partial_\mu \psi.$$

D'après nos hypothèses, les dérivées troisièmes de ψ peuvent être discontinues à la traversée de S (cela entraîne une discontinuité pour $s_{\mu\nu}$). On a donc, d'après les conditions de Hadamard,

$$\begin{aligned} [\partial_{\mu\nu}\varphi'_\rho] &= [\partial_{\mu\nu}(\varphi_\rho + \partial_\rho\psi)] = [\partial_{\mu\nu}\varphi_\rho] + [\partial_{\mu\nu\rho}\psi] \\ &= \Phi_\rho l_\mu l_\nu + \theta l_\mu l_\nu l_\rho \equiv \Phi'_\rho l_\mu l_\nu. \end{aligned}$$

D'où

$$(II.15) \quad \Phi'_\rho = \Phi_\rho + \theta l_\rho.$$

Dans le cas où Φ_ρ est colinéaire à l_ρ , c'est-à-dire normal à S , on peut donc avoir $\Phi'_\rho = 0$ en faisant une transformation de jauge convenablement choisie. La discontinuité Φ_ρ est alors « non significative ». Il n'en est évidemment pas de même dans le cas général.

Dans le cas particulier (que nous retrouverons dans l'étude du problème de Cauchy) où S a pour équation $x^0 = 0$, on a $l_0 = 1$, $l_k = 0$ ($k = 1, 2, 3$). L'équation (II.13) s'écrit alors $K^{\mu 0, 0\tau} \Phi_\tau = 0$; d'où, $K^{\mu\rho,\sigma\tau}$ étant antisymétrique en (μ, ρ) et en (σ, τ) , $K^{j0, 0k} \Phi_k = 0$. Les Φ_k n'étant pas tous nuls, on a

$$(II.16) \quad \det[K^{j0, 0k}] = 0.$$

Quant à Φ_0 , il est non significatif, car on peut l'annuler par une transformation de jauge telle que $\Phi'_0 = \Phi_0 + \theta = 0$.

2. Problème de Cauchy. — Sur une hypersurface S du genre espace, d'équation $x^0 = 0$, supposons données les valeurs de $s_{\mu\nu}$, de $g_{\mu\nu}$, de $\partial_0 g_{\mu\nu}$. Une dérivation sur S donne $\partial_k s_{\mu\nu}$, $\partial_k g_{\mu\nu}$, $\partial_{ik} g_{\mu\nu}$ et $\partial_{k0} g_{\mu\nu}$. Les inconnues sont donc $\partial_0 s_{\mu\nu}$ et $\partial_{00} g_{\mu\nu}$.

Reprenons les équations du champ électromagnétique sous la forme

$$\begin{cases} (II.17) & K^{\mu\rho,\sigma\tau} \nabla_\rho s_{\sigma\tau} = 0, \\ (II.18) & \sum_{(\mu,\nu,\rho)} \partial_\mu s_{\nu\rho} = 0. \end{cases}$$

$K^{\mu\rho,\sigma\tau}$, qui ne dépend que de $g_{\mu\nu}$ et $s_{\mu\nu}$, se calcule immédiatement à l'aide de la formule (II.3). Les coefficients de la connexion $\{\overset{\rho}{\underset{\nu}{\epsilon}}_{\mu\nu}\}$, qui ne dépendent que des $\hat{e}_\rho g_{\mu\nu}$, sont immédiatement fournis par les données de Cauchy. (II.17) peut donc s'écrire

$$(II.19) \quad K^{\mu 0, \sigma\tau} \partial_0 s_{\sigma\tau} + D^\mu(\text{d. C.}) = 0,$$

$D^\mu(\text{d. C.})$ étant une expression qui ne dépend que des données de Cauchy.

L'équation (II.18), qui peut s'écrire $\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho} \partial_\mu s_{\nu\rho} = 0$, donne

$$(II.20) \quad \epsilon^{\lambda 0\nu\rho} \partial_0 s_{\nu\rho} + E^\lambda(\text{d. C.}) = 0,$$

$E^\lambda(\text{d. C.})$ étant une expression qui ne dépend que des données de Cauchy.

Pour $\mu = 0$, (II.19) donne $D^0(\text{d. C.}) = 0$, condition imposée aux données de Cauchy sur S . De même, pour $\lambda = 0$, (II.20) donne $E^0(\text{d. C.}) = 0$, condition également imposée aux données de Cauchy sur S .

Pour $\lambda = k$ ($k = 1, 2, 3$), (II.20) donne

$$(II.21) \quad 2 \partial_0 s_{1j} + E^k(d. C.) = 0,$$

avec $i \neq j \neq k \neq 0$.

Cette équation donnera toujours les valeurs des 3 dérivées premières qui figurent aux premiers membres.

Compte tenu du résultat qu'on vient d'obtenir et de l'antisymétrie de $K^{\mu\rho, \sigma\tau}$, (II.19) peut s'écrire

$$(II.22) \quad K^{i0, 0k} \partial_0 s_{0k} + F^i(d. C.) = 0,$$

$F^i(d. C.)$ désignant une somme de grandeurs déjà calculées à partir des données de Cauchy.

A cause de l'antisymétrie de $K^{\mu\rho, \sigma\tau}$, (II.22) s'écrit

$$(II.23) \quad K^{j0, 0k} \partial_0 s_{0k} + F^j(d. C.) = 0,$$

Dans le cas où les $F^j(d. C.)$ ne sont pas tous nuls, (II.23) n'aura de solution définie que si $\det[K^{j0, 0k}] \neq 0$.

Dans le cas où les $F^j(d. C.)$ sont tous nuls, les $\partial_0 s_{0k}$ sont tous nuls (solution unique) si $\det[K^{j0, 0k}] \neq 0$; ils sont indéterminés si $\det[K^{j0, 0k}] = 0$.

On retrouve bien l'équation $\det[K^{j0, 0k}] = 0$ pour les variétés caractéristiques, comme au paragraphe précédent.

Nous ne ferons pas le calcul des $\partial_{00} g_{\mu\nu}$, qui ferait intervenir l'équation d'Einstein $S_{\alpha\beta} = \chi \tau_{\alpha\beta}$. En effet, le tenseur d'impulsion-énergie $\tau_{\alpha\beta}$ ne dépend que de $s_{\mu\nu}$ et $g_{\mu\nu}$, qui sont continues par hypothèse. $\tau_{\alpha\beta}$ est donc continue à la traversée de S et nous pouvons écrire $[S_{\alpha\beta}] = 0$.

Le résultat de cette équation est bien connu : le problème de Cauchy (pour les dérivées du tenseur métrique) a une solution unique sauf si S est une variété caractéristique satisfaisant à l'équation

$$\nabla_1 f = g^{\mu\nu} \partial_{\mu} f \partial_{\nu} f = 0.$$

Les ondes gravitationnelles et les ondes électromagnétiques n'ont donc plus la même équation de propagation. S peut être une variété caractéristique pour le champ de gravitation sans l'être pour le champ électromagnétique et réciproquement.

III. Solution à symétrie sphérique

1. Nous adopterons les mêmes hypothèses que celles qui sont adoptées pour le calcul du champ électromagnétique maxwellien à symétrie sphérique, dans le cadre de la relativité générale [2]. Nous admettrons qu'il existe un système de coordonnées où la métrique s'écrit sous la forme

$$(III.1) \quad ds^2 = -e^u dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + e^v dt^2,$$

r étant la coordonnée « radiale », θ la colatitute, φ la longitude et t le temps. μ et ν sont des fonctions de r et t qui tendent vers 0 quand $r \rightarrow \infty$.

Nous poserons $x^0 = t$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$.

Enfin, nous admettrons que les composantes φ_2 et φ_3 du potentiel-vecteur sont nulles et que les composantes φ_0 et φ_1 ne dépendent que de r et t .

Compte tenu de l'égalité $s_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi_\nu - \partial_\nu \varphi_\mu$, ces hypothèses entraînent que la seule composante non nulle de $s_{\mu\nu}$ est s_{01} .

L'égalité $\dot{s}^{*\mu\nu} = (1/2 \sqrt{-g}) \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} s_{\rho\sigma}$ entraîne alors que la seule composante non nulle de $\dot{s}^{*\mu\nu}$ est $\dot{s}^{*23}$. On a

$$(III.2) \quad \dot{s}^{*23} = s_{01} / \sqrt{-g}.$$

D'après (I.1), on a

$$(III.3) \quad G = \frac{1}{4} s_{\mu\nu} \dot{s}^{*\mu\nu} = 0.$$

D'après (I.5), on a, pour l'induction $p^{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial F} s^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial G} \dot{s}^{*\mu\nu}$,

$$(III.4) \quad p^{01} = \frac{\partial L}{\partial F} s^{01}, \quad p^{23} = \frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial G} \dot{s}^{*23} = \frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial G} \frac{s_{01}}{\sqrt{-g}}.$$

Les autres composantes de $p^{\mu\nu}$ sont nulles.

D'après l'équation de champ $\nabla_\rho p^{\rho\sigma} = 0$, qui peut aussi s'écrire

$$\partial_\mu (\sqrt{-g} p^{\rho\sigma}) = 0$$

en raison de l'antisymétrie de $p^{\rho\sigma}$, on a

$$\begin{aligned} \partial_0 (\sqrt{-g} p^{01}) &= 0, & \partial_1 (\sqrt{-g} p^{01}) &= 0, \\ \partial_2 (\sqrt{-g} p^{23}) &= 0, & \partial_3 (\sqrt{-g} p^{23}) &= 0. \end{aligned}$$

Donc, $\sqrt{-g} p^{01}$ ne dépend pas de r et de t ; $\sqrt{-g} p^{23}$ ne dépend pas de θ et φ . On peut donc poser

$$(III.5) \quad \sqrt{-g} p^{01} = K(\theta, \varphi), \quad \sqrt{-g} p^{23} = H(r, t).$$

D'après (III.4),

$$(III.6) \quad \sqrt{-g} = r^2 \sin \theta e^{(\mu+\nu)/2}.$$

Ces trois dernières égalités donnent

$$(III.7) \quad p^{01} = K(\theta, \varphi) \frac{e^{-(\mu+\nu)/2}}{r^2 \sin \theta}, \quad p^{23} = H(r, t) \frac{e^{-(\mu+\nu)/2}}{r^2 \sin \theta}.$$

Mais, d'après (III.4), p^{01} ne dépend que de r et t , puisqu'il en est ainsi de φ_{10} , φ_{01} , g^{00} et g^{11} . On doit donc avoir, d'après (III.7), $K(\theta, \varphi) = K \sin \theta$ et

$$(III.8) \quad p^{10} = (K/r^2) e^{-(\mu+\nu)/2}.$$

Encore d'après (III.4), $\sqrt{-g} p^{23}$ ne dépend que de r et t . On peut poser $\sqrt{-g} p^{23} = H(r, t)$. D'où

$$p^{23} = H(r, t) e^{-(\mu+\nu)/2} / r^2 \sin \theta.$$

On retrouve simplement la deuxième des équations (III.7). D'après (I.1) et (III.1),

$$(III.9) \quad F = \frac{1}{2} s_{\mu\nu} s^{\mu\nu} = s_{01} s^{01} = g^{00} g^{11} (s_{01})^2 = -e^{-(\mu+\nu)} (s_{01})^2;$$

μ , ν , s_{01} ne dépendent que de r et t . Donc, d'après la formule précédente, F ne dépend que de r et t . Puisque $G = 0$, il en est donc de même pour L .

En résumé, s_{01} , F et L ne dépendent que de r et t .

Calculons maintenant les composantes du tenseur d'impulsion-énergie électromagnétique $T_{\mu\nu}$. D'après (I.10), $T^\mu_\nu = -\frac{1}{2} L \delta^\mu_\nu + p^{\mu\sigma} s_{\sigma\nu}$. Cette expression donne immédiatement

$$(III.10) \quad T^1_1 = T^0_0 = -\frac{1}{2} L + p^{01} s_{10}, \quad T^2_2 = T^3_3 = -\frac{1}{2} L;$$

$T^\mu_\nu = 0$ si $\mu \neq \nu$. On vérifie facilement que $T^\mu_\nu = T^\mu_\nu$.

Les équations fondamentales de la relativité générale peuvent s'écrire

$$(III.11) \quad R_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \chi (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T).$$

On sait que, avec le ds^2 choisi (III.4),

$$(III.12) \quad R_{11} = e^{\mu-\nu} \left[\frac{\ddot{\mu}}{2} + \frac{\dot{\mu}}{4} (\dot{\mu} - \dot{\nu}) \right] + \frac{\mu'}{r} - \frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'}{4} (\mu' - \nu'),$$

$$(III.13) \quad R_{22} = e^{-\mu} \left[\frac{r}{2} (\mu' - \nu') - 1 \right] + 1, \quad R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta,$$

$$(III.14) \quad R_{00} = e^{\nu-\mu} \left[\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'}{4} (\nu' - \mu') + \frac{\nu'}{r} \right] - \frac{\ddot{\mu}}{2} - \frac{\dot{\mu}}{4} (\dot{\mu} - \dot{\nu}),$$

$$(III.15) \quad R_{01} = \dot{\mu} r.$$

D'après (III.4), (III.10) et (III.11), $R_{01} = 0$. Donc, d'après (III.15),

$$(III.16) \quad \dot{\mu} = 0;$$

μ ne dépend donc que de r et, d'après (III.12) et (III.14), tous les termes pointés disparaissent des équations (III.11). On retrouve simplement les équations du cas statique. (III.11) donne, compte tenu de (III.10),

$$(III.17) \quad \frac{\mu'}{r} - \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'}{4} (\mu' - \nu') + \Lambda e^{\mu} = -\frac{\chi}{2} e^{\mu} L,$$

$$(III.18) \quad e^{-\mu} \left[\frac{r}{2} (\mu' - \nu') - 1 \right] + 1 + \Lambda r^2 = -\frac{\chi}{2} r^2 (L - 2 p^{01} s_{01}),$$

$$(III.19) \quad \frac{\nu'}{r} + \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'}{4} (\nu' - \mu') - \Lambda e^{\mu} = \frac{\chi}{2} e^{\mu} L.$$

Ajoutons membre à membre (III.17) et (III.19); on a $(\mu' + \nu')/r = 0$. Donc

$$\mu + \nu = \text{Cte}.$$

A l'infini, on doit avoir $\mu = \nu = 0$. Donc, la constante de cette dernière équation est nulle. On a $\mu + \nu = 0$.

Reportons ce résultat dans (III.18) :

$$(III.20) \quad e^{-\mu} (r \mu' - 1) = -\frac{1}{2} \chi r^2 (L - 2 p^{01} s_{01}) - (1 - \Lambda r^2).$$

Posons $e^{-\mu} = \gamma$ et reportons dans (III.20). Cette équation s'intègre immédiatement, ce qui donne

$$r \gamma = \int_{\alpha}^r \left[(1 + \Lambda r^2) + \frac{\chi}{2} r^2 (L - 2 p^{01} s_{01}) \right] dr$$

ou, en faisant rentrer la constante d'intégration dans la deuxième intégrale,

$$(III.21) \quad r \gamma = r + \frac{\Lambda}{3} r^3 + \frac{\chi}{2} \int_{\alpha}^r r^2 (L - 2 p^{01} s_{01}) dr.$$

Posons $D_r = p^{01}$ (induction), $E_r = s_{01}$ (champ); (III.21) s'écrit alors

$$(III.22) \quad \gamma = 1 + \frac{\Lambda}{3} r^2 + \frac{\chi}{2r} \int_{\alpha}^r r^2 (L - 2 E_r D_r) dr.$$

La relation (I.5), non linéaire, entre champ et induction donne, compte tenu de (III.4) et de (III.8),

$$D_r = \frac{\partial L}{\partial F} g^{00} g^{11} E_r,$$

d'où

$$D_r = -\frac{\partial L}{\partial F} e^{-(\mu+\nu)} E_r$$

ou

$$\frac{K}{r^2} \mathbf{e}^{-(\mu+\nu)/2} = -\frac{\partial L}{\partial F} \mathbf{e}^{-(\mu+\nu)} E_r.$$

On a donc finalement, pour le champ et l'induction électriques,

$$(III.23) \quad E_r = -\frac{K}{r^2} \mathbf{e}^{(\mu+\nu)/2} \frac{1}{\partial L / \partial F}, \quad D_r = \frac{K}{r^2} \mathbf{e}^{-(\mu+\nu)/2}.$$

Reportons ces expressions dans (III.22). Nous avons

$$(III.24) \quad \gamma = 1 + \frac{\Lambda}{3} r^2 + \frac{\chi}{2r} \int_{\alpha}^r \left(L + \frac{2K^2}{r^4 \partial L / \partial F} \right) r^2 dr.$$

Pour terminer l'intégration, on a besoin de F et G , puisque $L = L(F, G)$. On a vu que $G = 0$. On a, d'après (I.4) et (III.23),

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} s_{\mu\nu} s^{\mu\nu} = s_{01} s^{01} = g^{00} g^{11} (s_{01})^2 \\ &= -\mathbf{e}^{-(\mu+\nu)} \left(-\frac{K}{r^2} \mathbf{e}^{(\mu+\nu)/2} \frac{1}{\partial L / \partial F} \right)^2 \end{aligned}$$

ou

$$(III.25) \quad F = -\frac{K^2}{r^4} \frac{1}{(\partial L / \partial F)^2}.$$

Puisque L ne dépend que de F et de G (qui est nul), on aura l'expression de F en fonction de r en résolvant (III.25) par rapport à l'inconnue F .

En résumé, puisque $\mu + \nu = 0$, nous obtenons les résultats suivants :

a) on obtient la valeur de F en résolvant par rapport à F l'équation (III.25), qu'on peut encore écrire

$$(III.26) \quad F \left(\frac{\partial L}{\partial F} \right)^2 + \frac{K^2}{r^4} = 0;$$

b) l'induction et le champ électriques sont donnés par les relations

$$(III.27) \quad D_r = \frac{K}{r^2}, \quad E_r = -\frac{K}{r^2 \partial L / \partial F};$$

c) les coefficients de la métrique sont déterminés par la valeur de $\gamma = \mathbf{e}^{-\mu}$:

$$(III.24) \quad \gamma = 1 + \frac{\Lambda}{3} r^2 + \frac{\chi}{2r} \int_{\alpha}^r \left(L + \frac{2K^2}{r^4 \partial L / \partial F} \right) r^2 dr.$$

On remarque que l'induction $D_r = K/r^2$ est indépendante aussi bien de la métrique que du lagrangien $L(F, G)$. Il est donc naturel de considérer que cette grandeur n'a pas de signification physique, et ceci d'autant plus que $D_r \rightarrow \infty$ quand $r \rightarrow 0$.

Pour que le champ E_r soit fini au centre de la « particule », il faut que $r^2 \partial L / \partial F$ ait une valeur différente de 0 pour $r = 0$. Ceci restreint le choix du lagrangien $L(F, G)$.

Remarquons enfin que la relation non linéaire entre champ et induction donne, d'après (III.4),

$$p^{23} = \frac{1}{2\sqrt{-g}} E_r \frac{\partial L}{\partial G},$$

alors que s_{23} est nul. On aurait donc un champ magnétique sans avoir d'induction magnétique.

2. **Charge de la particule.** — On a vu au chapitre I que la « libre densité de courant » est donnée par l'égalité

$$\sqrt{-g} j^\mu = \frac{1}{4\pi} \partial_\nu (\sqrt{-g} s^{\mu\nu}).$$

La charge totale est égale par définition à

$$Q = \iiint j^0 \sqrt{-a} dv,$$

l'intégration étant étendue à tout l'espace physique tridimensionnel, dont l'élément de volume est désigné par $\sqrt{-a} dv$. On a donc

$$Q = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (\sqrt{-g} s^{0\nu}) \sqrt{-a} dv.$$

La solution à symétrie sphérique que nous avons obtenue permet, à l'aide d'un calcul sans difficultés, de mettre cette expression sous la forme

$$Q = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial r} (-r^2 \sin \theta E_r) dr d\theta d\varphi$$

ou

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{d}{dr} (-r^2 E_r) dr.$$

D'où, d'après (III.27),

$$(III.28) \quad Q = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{d}{dr} \left(\frac{K}{\partial L / \partial F} \right) dr;$$

γ étant donné par (III.24) et $\partial L / \partial F$ ne dépendant que de F et G qui sont connus, le problème est résolu.

Dans le cas où le problème est traité dans le cadre de la relativité restreinte, on a $\gamma = \epsilon^{-\mu} = 1$ et l'intégration de (III.28) peut se faire même si l'on ne connaît pas la forme de $L(F, G)$. On a alors évidemment

$$Q = K \left[\frac{1}{\partial L / \partial F} \right]_{r=0}^\infty.$$

D'après (III.26), on a $\partial L / \partial F = \pm K / r^2 \sqrt{-F}$. D'où

$$(III.29) \quad Q = \pm \frac{1}{r^2} \sqrt{-F} \Big|_{r=0}^\infty.$$

Lorsque r augmente indéfiniment, F tend vers son expression maxwellienne. Or, en théorie de Maxwell on a $-F = (E_r)^2 = (\epsilon / r^2)^2$, ϵ étant la charge de la particule, au sens que l'on donne à ce mot en théorie maxwellienne. Par conséquent, on a, même en théorie non linéaire, $\lim_{r \rightarrow \infty} (r^2 \sqrt{-F}) = \epsilon$ et, d'après (III.29),

$$Q = \pm \left[\epsilon - \lim_{r \rightarrow 0} (r^2 \sqrt{-F}) \right].$$

Mais, dans toute théorie non linéaire acceptable, le champ E_r au centre de la particule est fini et il en est de même pour $-F$, d'après (III.9). On a donc finalement $Q = \pm \epsilon$, ce qui montre que l'expression (I.18) est physiquement acceptable pour définir une densité de courant-charge.

IV. Equations aux variations

1. Différents auteurs, en particulier M^{me} Blancheton dans sa thèse [6], ont étudié les équations aux variations de la relativité générale, dans le cas extérieur

et pour différents types de cas intérieur. Nous nous proposons dans ce chapitre d'établir et d'étudier les équations aux variations des théories du type Born & Infeld, dans le cadre de la relativité générale. Rappelons d'abord brièvement ce que sont les équations aux variations.

Soit $dx/dt = F(x, t)$ un système différentiel. x est une inconnue vectorielle, t une variable scalaire, F une fonction différentiable par rapport aux composantes de x quelle que soit la valeur de t et quel que soit x dans un domaine ouvert D . Soit $x = f_0(t)$ une solution particulière de ce système contenue dans D . On introduit la nouvelle fonction inconnue y définie par l'égalité $x = f_0(t) + y$.

Cette nouvelle fonction obéit à l'équation différentielle

$$dy/dt = L(t)y + \varphi(y),$$

où $L(t) = F'_x[f_0(t), t]$ et $\|\varphi\| \rightarrow 0$ lorsque $\|y\| \rightarrow 0$. $\|\varphi\|$ et $\|y\|$ désignent les normes des vecteurs φ et y .

On appelle système d'équations aux variations associé au système donné et à la solution $x = f_0(t)$ le système linéaire $dy/dt = L(t)y$. La variation y est désignée aussi par δx .

Dans le cas des équations aux dérivées partielles, les équations aux variations sont définies d'une manière identique.

2. Nous allons établir les équations aux variations de la théorie électromagnétique non linéaire, dans le cadre de la relativité générale. Le champ électromagnétique « varié » sera $s_{\mu\nu} + \delta s_{\mu\nu}$, le champ de gravitation varié sera $g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$.

Nous devons donc établir les équations variées du système suivant :

$$(IV.1) \quad S_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu},$$

$$(IV.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \left(L - G \frac{\partial L}{\partial G} \right) g_{\mu\nu} + \frac{\partial L}{\partial F} s^{\rho}_{\mu} s_{\rho\nu}, \\ \end{array} \right.$$

$$(IV.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu}, \\ \end{array} \right.$$

$$(IV.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\rho}(\sqrt{-g} p^{\rho\sigma}) \equiv \partial_{\rho}(\sqrt{-g} p^{\rho\sigma}) = 0, \\ \end{array} \right.$$

$$(IV.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\rho}(\sqrt{-g} s^{*\rho\sigma}) \equiv \partial_{\rho}(\sqrt{-g} s^{*\rho\sigma}) = 0, \\ \end{array} \right.$$

Les variations du champ de gravitation et du champ électromagnétique seront désignées respectivement par $\gamma_{\mu\nu}$ et $\sigma_{\mu\nu}$.

L'équation $s_{\mu\nu} = \partial_{\mu}\varphi_{\nu} - \partial_{\nu}\varphi_{\mu}$ entraîne, $\delta\varphi_{\mu}$ désignant la variation du potentiel-vecteur,

$$\delta s_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu} = \partial_{\mu}(\delta\varphi_{\nu}) - \partial_{\nu}(\delta\varphi_{\mu}).$$

La variation $\sigma_{\mu\nu}$ dérive donc du potentiel-vecteur $\delta\varphi_{\mu}$. On a, par conséquent,

$$(IV.6) \quad \nabla_{\rho}(\sqrt{-g} \sigma^{*\rho\sigma}) \equiv \partial_{\rho}(\sqrt{-g} \sigma^{*\rho\sigma}) = 0,$$

$\sigma^{*\mu\nu}$ étant le champ conjugué de $\sigma_{\mu\nu}$.

Nous devons calculer maintenant les variations de différentes grandeurs de champ qui interviennent dans les équations (IV.1) à (IV.5).

Calcul de $\delta s^{\mu\nu}$.

$$\begin{aligned} \delta s^{\mu\nu} &= \delta(g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} s_{\rho\sigma}) \\ &= \delta g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} s_{\rho\sigma} + g^{\mu\rho} \delta g^{\nu\sigma} s_{\rho\sigma} + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \delta s_{\rho\sigma}. \end{aligned}$$

Compte tenu des relations $\delta g^{\mu\rho} = -\gamma^{\mu\rho}$ et $\delta s_{\rho\sigma} = \sigma_{\rho\sigma}$, on a donc

$$(IV.7) \quad \delta s^{\mu\nu} = \sigma^{\mu\nu} - \gamma^{\mu\rho} s^{\nu}_{\rho} - \gamma^{\nu\rho} s^{\mu}_{\rho}.$$

Calcul de $\delta s^{*\mu\nu}$.

$$\begin{aligned}\delta s^{*\mu\nu} &= \delta \left(\frac{1}{2\sqrt{-g}} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} s_{\rho\sigma} \right) = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left[\delta \left(\frac{1}{\sqrt{-g}} \right) s_{\rho\sigma} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \delta s_{\rho\sigma} \right] \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left[-\frac{1}{2} (-g)^{-1/2} g^{\lambda\lambda} \delta g_{\alpha\beta} s_{\rho\sigma} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \sigma_{\rho\sigma} \right].\end{aligned}$$

Posons $\gamma = g^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta}$. Nous avons

$$\delta s^{*\mu\nu} = -\frac{1}{4\sqrt{-g}} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} s_{\rho\sigma} \gamma + \frac{1}{2\sqrt{-g}} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \sigma_{\rho\sigma}.$$

Posons $\sigma^{*\mu\nu} = (1/2\sqrt{-g}) \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \sigma_{\rho\sigma}$. On a

$$(IV.8) \quad \delta s^{*\mu\nu} = \sigma^{*\mu\nu} - \frac{1}{2} s^{*\mu\nu} \gamma.$$

Calcul de δF .

$$\delta F = \delta \left(\frac{1}{2} s_{\mu\nu} s^{\mu\nu} \right) = \frac{1}{2} (\delta s_{\mu\nu} s^{\mu\nu} + s_{\mu\nu} \delta s^{\mu\nu}).$$

D'après (IV.7), on a donc

$$\delta F = \frac{1}{2} [s^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} + s_{\mu\nu} (\sigma^{\mu\nu} - \gamma^{\mu\rho} s_{\rho}^{\nu} - \gamma^{\nu\rho} s_{\rho}^{\mu})].$$

D'où, après un calcul simple,

$$(IV.9) \quad \delta F = s^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} - \gamma^{\mu\rho} s_{\rho}^{\nu} s_{\mu\nu}.$$

Calcul de δG .

$$\delta G = \delta \left(\frac{1}{4} s_{\mu\nu} s^{*\mu\nu} \right) = \frac{1}{4} (\delta s_{\mu\nu} s^{*\mu\nu} + s_{\mu\nu} \delta s^{*\mu\nu}).$$

D'où, d'après (IV.8),

$$\delta G = \frac{1}{4} [\sigma_{\mu\nu} s^{*\mu\nu} + s_{\mu\nu} (\sigma^{*\mu\nu} - \frac{1}{2} s^{*\mu\nu} \gamma)].$$

D'où, après un calcul simple,

$$(IV.10) \quad \delta G = \frac{1}{2} (s^{*\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} - G \gamma).$$

Calcul de $\delta(\sqrt{-g} p^{\mu\nu})$.

$$\begin{aligned}\delta(\sqrt{-g} p^{\mu\nu}) &= \delta\sqrt{-g} p^{\mu\nu} + \sqrt{-g} \delta p^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\rho\sigma} \delta g^{\rho\sigma} p^{\mu\nu} + \sqrt{-g} \delta \left(\frac{\partial L}{\partial F} s^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial G} s^{*\mu\nu} \right) \\ &= \frac{\gamma}{2} \sqrt{-g} p^{\mu\nu} + \sqrt{-g} \left[\delta \left(\frac{\partial L}{\partial F} \right) s^{\mu\nu} + \frac{\partial L}{\partial F} \delta s^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta \left(\frac{\partial L}{\partial G} \right) s^{*\mu\nu} - \frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial G} \delta s^{*\mu\nu} \right] \\ &= \frac{\gamma}{2} \sqrt{-g} p^{\mu\nu} + \sqrt{-g} \left[\left(\frac{\partial^2 L}{\partial F^2} \delta F + \frac{\partial^2 L}{\partial F \partial G} \delta G \right) s^{\mu\nu} + \frac{\partial L}{\partial F} \delta s^{\mu\nu} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial F \partial G} \delta F + \frac{\partial^2 L}{\partial G^2} \delta G \right) s^{*\mu\nu} + \frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial G} \delta s^{*\mu\nu} \right].\end{aligned}$$

Compte tenu de (IV.7) à (IV.10), cette expression se met sous la forme

$$(IV.11) \quad \delta(\sqrt{-g} p^{\mu\nu}) = \sqrt{-g} (\Sigma^{\mu\nu, \alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} + C^{\mu\nu, \alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}),$$

avec

$$(IV.12) \quad \begin{aligned}\Sigma^{\mu\nu, \alpha\beta} &= \left(\frac{\partial^2 L}{\partial F^2} s^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L}{\partial F \partial G} s^{*\mu\nu} \right) s^{\alpha\beta} + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial F \partial G} s^{\mu\nu} + \frac{\partial^2 L}{\partial G^2} s^{*\mu\nu} \right) s^{*\alpha\beta} + \frac{\partial L}{\partial F} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} + \frac{1}{4\sqrt{-g}} \frac{\partial L}{\partial G} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\end{aligned}$$

et

$$(IV.13) \quad C^{\mu\nu, \alpha\beta} = \frac{1}{2} p^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial F^2} s^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L}{\partial F \partial G} s^{\mu\nu} \right) s^{\alpha\rho} s_\rho^\beta - \\ - \frac{G}{2} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial F \partial G} s^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L}{\partial G^2} s^{\mu\nu} \right) g^{\alpha\beta} - \frac{\partial L}{\partial F} (g^{\alpha\mu} s^{\beta\nu} + g^{\nu\alpha} s^{\mu\beta}) - \frac{1}{4} \frac{\partial L}{\partial G} s^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}.$$

3. Equations aux variations déduites des équations du champ électromagnétique. — On a, pour le champ non varié, d'après (IV.4), $\partial_\rho(\sqrt{-g} p^{\rho\sigma}) = 0$. Donc, pour le champ varié, on a $\partial_\rho[\delta(\sqrt{-g} p^{\rho\sigma})] = 0$. D'où, d'après (IV.11),

$$(IV.14) \quad \partial_\rho[\sqrt{-g} (\Sigma^{\rho\sigma, \alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} + C^{\rho\sigma, \alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta})] = 0.$$

De plus, d'après (IV.5), $\partial_\rho(\sqrt{-g} s^{\rho\sigma}) = 0$. Donc, on a, pour le champ varié,

$$(IV.15) \quad \partial_\rho[\delta(\sqrt{-g} s^{\rho\sigma})] = 0.$$

Or, on a d'après (IV.8),

$$\delta(\sqrt{-g} s^{\rho\sigma}) = \delta\sqrt{-g} s^{\rho\sigma} + \sqrt{-g} \delta s^{\rho\sigma} \\ = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} s^{\rho\sigma} + \sqrt{-g} (s^{\rho\sigma} - \frac{1}{2} s^{\rho\sigma} \gamma) \\ = \frac{1}{2} \sqrt{-g} \gamma s^{\rho\sigma} + \sqrt{-g} (s^{\rho\sigma} - \frac{1}{2} s^{\rho\sigma} \gamma) = \sqrt{-g} s^{\rho\sigma}.$$

D'où, d'après (IV.15), $\partial_\rho(\sqrt{-g} s^{\rho\sigma}) = 0$. On retrouve simplement l'équation (IV.6).

4. Equation aux variations déduite de l'équation d'Einstein. — Calculons d'abord $\delta T_{\mu\nu}$. On a, d'après (I.13),

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \left(L - G \frac{\partial L}{\partial G} \right) g_{\mu\nu} + \frac{\partial L}{\partial F} s^\rho_\mu s_{\rho\nu}.$$

D'où, après un calcul sans difficultés,

$$(IV.16) \quad \delta T_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial L}{\partial F} \delta F - G \left(\frac{\partial^2 L}{\partial F \partial G} \delta F - \frac{\partial^2 L}{\partial G^2} \delta G \right) \right] g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \left(L - G \frac{\partial L}{\partial G} \right) \delta g_{\mu\nu} + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial F^2} \delta F + \frac{\partial^2 L}{\partial F \partial G} \delta G \right) s^\rho_\mu s_{\rho\nu} + \frac{\partial L}{\partial F} \delta s^\rho_\mu s_{\rho\nu} + \frac{\partial L}{\partial F} s^\rho_\mu \delta s_{\rho\nu} \\ = \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left(\frac{\partial L}{\partial F} - G \frac{\partial^2 L}{\partial F \partial G} \right) + \frac{\partial^2 L}{\partial F^2} s^\rho_\mu s_{\rho\nu} \right] \delta F + \left(\frac{G}{2} g_{\mu\nu} \frac{\partial^2 L}{\partial G^2} + \frac{\partial^2 L}{\partial F \partial G} s^\rho_\mu s_{\rho\nu} \right) \delta G - \frac{1}{2} \left(L - G \frac{\partial L}{\partial G} \right) \delta g_{\mu\nu} + \frac{\partial L}{\partial F} \delta s^\rho_\mu s_{\rho\nu} + \frac{\partial L}{\partial F} s^\rho_\mu \delta s_{\rho\nu}.$$

Or,

$$\delta s^\rho_\mu = \delta(g^{\rho\sigma} s_{\sigma\mu}) = \delta g^{\rho\sigma} s_{\sigma\mu} + g^{\rho\sigma} \delta s_{\sigma\mu} \\ = -\gamma^{\rho\sigma} s_{\sigma\mu} + g^{\rho\sigma} \sigma_{\sigma\mu} = -\gamma^{\rho\sigma} s_{\sigma\mu} + \sigma^\rho_\mu.$$

On a donc, en reportant cette expression dans (IV.16),

$$(IV.17) \quad \delta T_{\mu\nu} = \Theta_{\mu\nu, \alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} + D_{\mu\nu, \alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta},$$

avec

$$(IV.18) \quad \Theta_{\mu\nu, \alpha\beta} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left(\frac{\partial L}{\partial F} - G \frac{\partial^2 L}{\partial F \partial G} \right) s^{\alpha\beta} + \frac{\partial^2 L}{\partial F^2} s^\rho_\mu s_{\rho\nu} s^{\alpha\beta} + \\ + \frac{1}{2} s^{\alpha\beta} \left(\frac{G}{2} g_{\mu\nu} \frac{\partial^2 L}{\partial G^2} + \frac{\partial^2 L}{\partial F \partial G} s^\rho_\mu s_{\rho\nu} \right) + \frac{\partial L}{\partial F} s^\alpha_\nu \delta^\beta_\mu + \frac{\partial L}{\partial F} s^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu$$

et

$$(IV.19) \quad D_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left(\frac{\partial L}{\partial F} - G \frac{\partial^2 L}{\partial F \partial G} \right) + \frac{\partial^2 L}{\partial F^2} s_{\mu}^{\rho} s_{\nu}^{\sigma} \right] s^{\alpha\beta} s^{\gamma}_{\sigma} - \\ - \frac{G}{2} \left(\frac{G}{2} g_{\mu\nu} \frac{\partial^2 L}{\partial G^2} + \frac{\partial^2 L}{\partial F \partial G} s_{\mu}^{\rho} s_{\nu}^{\sigma} \right) s^{\alpha\beta} - \\ - \frac{1}{2} \left(L - G \frac{\partial L}{\partial G} \right) \delta_{\mu}^{\alpha} \delta_{\nu}^{\beta} - \frac{\partial L}{\partial F} s_{\rho\nu} s_{\sigma\mu} g^{\rho\alpha} g^{\sigma\beta}.$$

Quant à $\delta S_{\alpha}^{\beta}$, on sait qu'il est donné par la formule (voir [6])

$$(IV.20) \quad \delta S_{\alpha}^{\beta} = \frac{1}{2} \left[-\nabla^{\rho} \nabla_{\rho} \Gamma_{\alpha}^{\beta} + R^{\beta\lambda} \Gamma_{\lambda\alpha} - R_{\alpha\lambda} \Gamma^{\lambda\beta} - 2 R_{\rho\alpha\lambda}^{\beta} \Gamma^{\rho\lambda} + \right. \\ \left. + \delta_{\alpha}^{\beta} R_{\rho\lambda} \Gamma^{\rho\lambda} + (S_{\alpha}^{\beta} - \Lambda \delta_{\alpha}^{\beta}) \Gamma + \nabla_{\alpha} Y^{\beta} + \nabla^{\beta} Y_{\alpha} - \delta_{\alpha}^{\beta} \nabla_{\lambda} Y^{\lambda} \right],$$

avec

$$(IV.21) \quad \begin{cases} \Gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \gamma, & \gamma = \gamma_{\lambda}^{\lambda}, \\ Y_{\alpha} = \nabla_{\lambda} \Gamma_{\alpha}^{\lambda}, & \Gamma = \Gamma_{\lambda}^{\lambda}. \end{cases}$$

On en tire facilement l'expression de $\delta S_{\mu\nu}$:

$$\delta S_{\mu\nu} = \delta(g_{\mu\alpha} S_{\nu}^{\alpha}) = \delta g_{\mu\alpha} S_{\nu}^{\alpha} + g_{\mu\alpha} \delta S_{\nu}^{\alpha} = \gamma_{\mu\alpha} S_{\nu}^{\alpha} + g_{\mu\alpha} \delta S_{\nu}^{\alpha}.$$

D'où, après un calcul sans difficultés,

$$(IV.22) \quad \delta S_{\mu\nu} = S_{\nu}^{\alpha} \gamma_{\mu\alpha} + \frac{1}{2} \left[-\nabla^{\rho} \nabla_{\rho} \Gamma_{\mu\nu} + R_{\mu}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\nu} - R_{\nu}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\mu} - \right. \\ \left. - 2 R_{\rho\nu\lambda\mu} \Gamma^{\rho\lambda} + g_{\mu\nu} R_{\rho\lambda} \Gamma^{\rho\lambda} + (S_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}) \Gamma + \nabla_{\nu} Y_{\mu} + \nabla_{\mu} Y_{\nu} - g_{\mu\nu} \nabla_{\lambda} Y^{\lambda} \right].$$

En résumé, les équations du champ électromagnétique nous donnent deux équations aux variations, (IV.14) et (IV.6),

$$\partial_{\rho}(\sqrt{-g} {}^{*}\sigma^{\rho\sigma}) = 0, \quad \partial_{\rho}[\sqrt{-g} (\Sigma^{\rho\sigma,\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} + \epsilon^{\rho\sigma,\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta})] = 0$$

et l'équation d'Einstein donne $\delta S_{\mu\nu} = \chi \delta T_{\mu\nu}$, $\delta S_{\mu\nu}$ étant donné par (IV.22), $\delta T_{\mu\nu}$ par (IV.17) à (IV.19).

5. Etude du problème de Cauchy. — Nous nous bornerons à faire cette étude dans le cadre de la relativité restreinte.

Nous avons à étudier dans ce cas le système d'équations

$$(IV.23) \quad \partial_{\rho}(\sqrt{-g} \Sigma^{\rho\sigma,\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}) = 0,$$

$$(IV.6) \quad \partial_{\rho}(\sqrt{-g} {}^{*}\sigma^{\rho\sigma}) = 0.$$

Supposons que l'on connaisse les valeurs prises par $\sigma_{\alpha\beta}$ sur une hypersurface S du genre espace, d'équation $x^0 = 0$. Une dérivation sur S donnera $\partial_i \sigma_{\alpha\beta}$. Nous devons calculer $\partial_0 \sigma_{\alpha\beta}$. (IV.23) peut s'écrire

$$\sqrt{-g} \Sigma^{\rho\sigma,\alpha\beta} \partial_{\rho} \sigma_{\alpha\beta} + \partial_{\rho}(\sqrt{-g} \Sigma^{\rho\sigma,\alpha\beta}) \sigma_{\alpha\beta} = 0.$$

Le deuxième terme prend sur S des valeurs connues grâce aux données de Cauchy. Désignons par D^{σ} (d. C.) la somme de tous les termes dont la valeur sur S est connue.

L'équation précédente s'écrit, après division par $\sqrt{-g}$,

$$(IV.24) \quad \Sigma^{0\sigma,\alpha\beta} \partial_0 \sigma_{\alpha\beta} + D^{\sigma}(\text{d. C.}) = 0.$$

D'autre part, (IV.6) se met sous la forme

$$\sum_{\mu,\nu,\rho} \partial_{\mu} \sigma_{\nu\rho} = 0 \quad \text{ou} \quad \epsilon^{\lambda\mu\nu\rho} \partial_{\mu} \sigma_{\nu\rho} = 0.$$

Regroupons dans un terme E^{λ} (d. C.) tous les termes dont la valeur sur S est connue grâce aux données de Cauchy. On a

$$\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho} \partial_0 \sigma_{\nu\rho} + E^{\lambda}(\text{d. C.}) = 0.$$

Pour $\lambda = 0$, on a $E^0(\text{d. C.}) = 0$, condition imposée aux données de Cauchy sur S.

Pour $\lambda = i$, on a, avec $(i \ j \ k) = \text{perm. circ. } (1 \ 2 \ 3)$,

$$(IV.25) \quad 2 \partial_0 \sigma_{jk} + E^i(\text{d. C.}) = 0.$$

Cette équation donnera les valeurs prises sur S par $\partial_0 \sigma_{jk}$. Il reste à calculer $\dot{\epsilon}_{0\sigma 0i}$. Puisque nous connaissons les valeurs prises par $\dot{\epsilon}_{0\sigma jk}$, nous pouvons mettre (IV.24) sous la forme suivante :

$$(IV.26) \quad \Sigma^{0\sigma, 0i} \dot{\epsilon}_{0\sigma 0i} + D'^\sigma(\text{d. C.}) = 0,$$

les termes de valeur connue étant regroupés dans $D'^\sigma(\text{d. C.})$. Le tenseur $\Sigma^{\rho\sigma, \alpha\beta}$ étant antisymétrique en $(\rho \ \sigma)$, on a $D'^0(\text{d. C.}) = 0$, autre condition imposée aux données de Cauchy sur S. (IV.26) donne donc

$$\Sigma^{0k, 0i} \partial_0 \sigma_{0i} + D'^k(\text{d. C.}) = 0.$$

Cette équation donnera les valeurs prises sur S par $\partial_0 \sigma_{0i}$, sauf dans le cas particulier où $\det [\Sigma^{0k, 0i}] = 0$.

Ce cas particulier montre que le tenseur $\Sigma^{\rho\sigma, \alpha\beta}$ joue dans les équations aux variations un rôle analogue à celui que joue $K^{\rho\sigma, \alpha\beta}$ dans les équations non variées. Les composantes du tenseur $\sigma_{\alpha\beta}$ pouvant être considérées comme des fluctuations du champ électromagnétique, la propagation de ces fluctuations est régie par les valeurs prises en chaque point de l'espace-temps par $\Sigma^{\rho\sigma, \alpha\beta}$.

V. Théories non linéaires particulières

Parmi les théories électromagnétiques non linéaires proposées jusqu'à maintenant, il en est deux qui entrent dans le cadre où nous nous sommes placé dans les chapitres précédents : ce sont les théories de Born & Infeld et d'Infeld & Hoffmann. La théorie de Mie, qui n'est pas basée sur l'emploi d'un lagrangien de la forme $L(F, G)$, n'entre pas dans ce cadre et nous ne nous en occuperons pas ici. L'étude de cette théorie et de ses généralisations a été faite par Mr Brotas [7]. Nous allons préciser les résultats que l'on obtient lorsqu'on transpose dans le cadre riemannien de la relativité générale ces deux théories de Born & Infeld et Infeld & Hoffmann, qui furent présentées par leurs auteurs dans le cadre minkowskien de la relativité restreinte.

1. Généralisation de la théorie de Born & Infeld. — Elle est basée sur l'emploi d'un lagrangien [2] qui peut se mettre sous la forme

$$(V.1) \quad \mathcal{L} = 2[\sqrt{-\pi} - \sqrt{-g}],$$

avec

$$\pi_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + s_{\mu\nu}, \quad \pi = \det[\pi_{\mu\nu}].$$

Cette expression est équivalente à la forme tridimensionnelle proposée par Born & Infeld [1]. Cette forme n'implique pas nécessairement le cadre minkowskien et se transpose sans modification dans l'espace riemannien de la relativité générale.

Un calcul simple de déterminants permet de montrer que

$$(V.2) \quad \pi = g + s + \frac{1}{2} g g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} s_{\mu\nu} s_{\rho\sigma},$$

s représentant le déterminant des $s_{\mu\nu}$.

Cette formule permet de mettre le lagrangien $\mathcal{L}$ sous la forme $\mathcal{L} = \sqrt{-g} \bar{L}$ avec

$$L = 2[(1 + F - G^2)^{1/2} - 1].$$

La relation non linéaire entre champ et induction s'écrit

$$(V.3) \quad p^{\mu\nu} = (s^{\mu\nu} - G s^{*\mu\nu})/L.$$

L'expression du tenseur d'impulsion-énergie est

$$(V.4) \quad T^\mu_\rho = (L - 1) \delta^\mu_\rho - \frac{s^{\mu\nu} s_{\rho\nu} - G^2 \delta^\mu_\rho}{\sqrt{1 + F - G^2}}.$$

Etudions plus particulièrement la solution à symétrie sphérique. Nous obtenons F à partir de l'équation (III.26) :

$$F \left(\frac{\partial L}{\partial F} \right)^2 + \frac{K^2}{r^4} = 0.$$

Compte tenu de ce que $G = 0$ pour la solution à symétrie sphérique, cette équation s'écrit

$$\frac{F}{1 + F} + \frac{K^2}{r^4} = 0.$$

D'où $F = -K^2/(K^2 + r^4)$. D'après (III.27), on a donc

$$(V.5) \quad E_r = -K/\sqrt{K^2 + r^4}.$$

Le champ électrique est donc fini au centre de la « particule ». D'après (V.4), on trouve pour les composantes du tenseur d'impulsion-énergie

$$(V.6) \quad \begin{aligned} T_1^1 = T_0^0 &= \frac{(r^2/r_0^2) + (r_0^2/r^2)}{\sqrt{1 + (r^4/r_0^4)}} - 1, \\ T_2^2 = T_3^3 &= \frac{r^2/r_0^2}{\sqrt{1 + (r^4/r_0^4)}} - 1. \end{aligned}$$

Nous avons posé $K^2 = r_0^4$. Les autres composantes de T^μ_ν sont nulles. En reportant ces valeurs dans (III.24), on trouve, pour la grandeur γ qui détermine les coefficients de la métrique,

$$(V.7) \quad r \gamma = r + (\Lambda + \chi) \frac{r^3}{3} - \chi r_0^2 \int_\alpha^r \sqrt{1 + \frac{r^4}{r_0^4}} dr.$$

La valeur de γ dépend donc de deux constantes d'intégration, r_0 et α .

Etudions plus en détail cette dernière formule, afin de la comparer aux autres solutions connues à symétrie sphérique, comme la solution de Schwarzschild.

1. Comportement à grande distance, pour $\alpha \gg r_0$. — Si α et r sont beaucoup plus grands que r_0 , l'intégrale qui figure dans (V.7) peut s'écrire approximativement

$$-\chi r_0^2 \int_\alpha^r \frac{r^2}{r_0^2} dr = -\chi \frac{r^3}{3} \Big|_\alpha^r = \frac{\chi}{3} (\alpha^3 - r^3).$$

Si nous négligeons Λ , (V.7) prend alors la forme

$$r \gamma = r + \frac{\chi}{3} r^3 + \frac{\chi}{3} (\alpha^3 - r^3).$$

D'où

$$\gamma = 1 + \frac{\chi \alpha^3}{3} \frac{1}{r}.$$

Ceci est de la forme $\gamma = 1 - (2m/r)$, comme pour la solution de Schwarzschild du cas extérieur, si l'on pose $\alpha = (-6m/\chi)^{1/3}$. La constante α est donc liée à la masse de la « particule ».

2. *Comportement aux grandes distances pour α quelconque.* $\sqrt{1 + (r^4/r_0^4)}$ n'est alors plus assimilable à r^2/r_0^2 dans tout le domaine d'intégration. Soit β une valeur quelconque de r , telle que $\beta \gg r_0$. On a évidemment

$$\int_{\alpha}^r \sqrt{1 + \frac{r^4}{r_0^4}} dr = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \frac{r^4}{r_0^4}} dr + \int_{\beta}^r \sqrt{1 + \frac{r^4}{r_0^4}} dr.$$

Dans la deuxième intégrale, $\sqrt{1 + (r^4/r_0^4)}$ est assimilable à r^2/r_0^2 dans tout le domaine d'intégration. Quant à la première intégrale, c'est une constante. Donc,

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^r \sqrt{1 + \frac{r^4}{r_0^4}} dr &= k(\alpha, \beta, r_0) + \int_{\beta}^r \frac{r^2}{r_0^2} dr \\ &= k(\alpha, \beta, r_0) + \frac{1}{r_0^2} \left(\frac{r^3}{3} - \frac{\beta^3}{3} \right), \end{aligned}$$

$k(\alpha, \beta, r_0)$ étant une constante dépendant de α , β et r_0 . Mais, puisque β est arbitraire, le résultat de l'intégration ne peut dépendre de sa valeur. On peut donc poser

$$k(\alpha, \beta, r_0) - \frac{\beta^3}{3r_0^2} = k'(\alpha, r_0),$$

$k'(\alpha, r_0)$ étant une constante qui ne dépend que de α et r_0 . (V.7) prend alors la forme suivante, en négligeant encore Λ ,

$$r\gamma = r + \chi \frac{r^3}{3} - \chi r_0^2 \left[k'(\alpha, r_0) + \frac{r^3}{3r_0^2} \right].$$

D'où

$$\gamma = 1 - \frac{\chi r_0^2 k'(\alpha, r_0)}{r}.$$

Ce résultat est encore de la forme $\gamma = 1 - (2m/r)$, mais m dépend ici de α et r_0 , alors qu'il ne dépendait que de α dans le cas précédent.

3. *Comportement près de l'origine (α quelconque).* — On peut écrire dans ce cas

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^r \sqrt{1 + \frac{r^4}{r_0^4}} dr &= \int_{\alpha}^0 \sqrt{1 + \frac{r^4}{r_0^4}} dr + \int_0^r \sqrt{1 + \frac{r^4}{r_0^4}} dr \\ &\simeq - \int_0^{\alpha} \sqrt{1 + \frac{r^4}{r_0^4}} dr + \int_0^r \left(1 + \frac{r^4}{2r_0^4} \right) dr \\ &\simeq r + \frac{r^5}{10r_0^4} - \int_0^{\alpha} \sqrt{1 + \frac{r^4}{r_0^4}} dr. \end{aligned}$$

D'où, d'après (V.7),

$$\gamma \simeq 1 + \frac{\chi}{3} r^2 - \chi r_0^2 \left[1 - \frac{1}{r} \int_0^{\alpha} \sqrt{1 + \frac{r^4}{r_0^4}} dr \right].$$

Cette expression montre que γ tend vers l'infini quand r tend vers 0, sauf dans le cas où

$$\int_0^x \sqrt{1 + \frac{r^4}{r_0^4}} dr = 0,$$

ce qui n'a lieu que lorsque $\alpha = 0$.

La métrique a donc un point singulier à l'origine. On peut rapprocher cela du fait qu'il en est de même pour le tenseur d'impulsion-énergie. En effet, d'après (V.6), T_1^1 et T_0^0 tendent vers l'infini quand r tend vers 0.

2. Généralisation de la théorie d'Infeld & Hoffmann. — Cette théorie [9] était basée sur l'emploi du lagrangien

$$(V.8) \quad L = \frac{1}{2} \text{Log} (1 + F).$$

Ce lagrangien se transpose sans modification en relativité générale. Cherchons d'abord F à l'aide de l'équation

$$F \left(\frac{\partial L}{\partial F} \right)^2 + \frac{K^2}{r^4} = 0.$$

D'après (V.8), cette équation s'écrit

$$\frac{F}{4(1+F)^2} + \frac{K^2}{r^4} = 0.$$

D'où

$$F = - \left(\frac{r^4}{8 K^2} + 1 \right) \pm \sqrt{\frac{r^4}{8 K^2} \left(\frac{r^4}{8 K^2} + 2 \right)}$$

et, d'après (III.27),

$$E_r = \frac{r^2}{4 K} \mp \sqrt{\frac{r^4}{16 K^2} - 1}.$$

La solution ainsi obtenue n'est physiquement acceptable que si E_r tend vers 0 lorsque r tend vers l'infini.

C'est pourquoi nous prendrons

$$(V.9) \quad E_r = \frac{r^2}{4 K} - (\text{sgn } K) \sqrt{\frac{r^4}{16 K^2} + 1}.$$

On vérifie sans peine que E_r tend bien vers 0 lorsque r tend vers l'infini, plus vite même que le champ coulombien en $1/r^2$. Il suffit pour cela d'utiliser l'inégalité suivante, valable pour tout $x > 0$,

$$\sqrt{x^2 + 1} - x < 1/x.$$

A l'aide de ces résultats et de (III.24), on obtient l'expression des coefficients de la métrique ; on a en effet

$$\begin{aligned} \gamma = 1 + \frac{\Lambda}{3} r^2 + \frac{\chi}{2r} \int_x^r \left\{ \frac{1}{2} \text{Log} \left[-\frac{r^4}{8 K^4} \pm \sqrt{\frac{r^4}{8 K^2} \left(\frac{r^4}{8 K^2} + 2 \right)} \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2r^2} \sqrt{r^4 + 16 K^2} \right\} r^2 dr. \end{aligned}$$

Pour que cette expression ait un sens physique acceptable, on voit facilement qu'il ne faut retenir que le signe + là où figure le symbole $\pm$.

Remarquons pour finir que, dans les lagrangiens de Born & Infeld et Infeld &

Hoffmann, figure, si l'on se place dans un système quelconque d'unités, une constante b telle que pour $b = 0$, on retrouve la théorie de Maxwell. Comme beaucoup d'auteurs, nous avons pris $b = 1$. Mais, dans le chapitre suivant nous allons voir cette constante jouer un rôle important.

VI. Essai sur la quantification d'une théorie du type Born & Infeld

Diverses tentatives ont été faites pour quantifier des champs libres obéissant à des équations non linéaires. Gupta [11] a ébauché une méthode de quantification du champ de gravitation (dans le cas extérieur) ; il développe en série l'équation d'Einstein $S_{\mu\nu} = 0$ par rapport à un paramètre κ convenablement choisi ; il traite le terme indépendant de κ comme un terme de champ libre obéissant à une équation linéaire, dont la quantification s'opère suivant des méthodes bien connues ; quant aux termes dépendant de κ , il les traite comme des termes de « self-interaction », suivant les méthodes de perturbation bien connues en théorie quantique des champs. Hurst et Thirring [10] ont quantifié le champ scalaire φ obéissant à l'équation d'Euler déduite du lagrangien

$$(VI.1) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - \frac{1}{2} m \varphi^2 + \lambda \varphi^3.$$

Le terme d'interaction est ici $\lambda \varphi^3$, λ étant une constante dont la valeur mesure l'intensité de la self-interaction.

De telles méthodes conviendraient pour la quantification du champ électromagnétique non linéaire. Dans les équations de champ proposées en 1934 par Born & Infeld figure une constante b qui mesure en quelque sorte la non-linéarité du champ ; lorsque $b \rightarrow 0$, les équations du champ de Born & Infeld se réduisent aux équations de Maxwell du champ électromagnétique libre.

C'est pourquoi, dans toute théorie électromagnétique du type Born & Infeld, doit intervenir une constante β telle que le lagrangien et les équations de champ qui s'en déduisent se réduisent respectivement au lagrangien et aux équations de la théorie maxwellienne, quand $\beta \rightarrow 0$. Nous écrirons donc le lagrangien sous la forme $L(F, G, \beta)$, avec la condition

$$(VI.2) \quad \lim_{\beta \rightarrow 0} L(F, G, \beta) = L_{\text{Max}},$$

L_{Max} désignant le lagrangien de la théorie maxwellienne.

La valeur de β mesure en quelque sorte la non-linéarité du champ électromagnétique ou, en langage corpusculaire, l'intensité de l'interaction entre photons.

Afin de respecter la covariance relativiste, nous n'utiliserons pas la formulation hamiltonienne souvent employée en théorie quantique des champs, mais le formalisme covariant relativiste élaboré par Bogolioubov & Stepanov [10]. D'autre part, pour éviter de faire intervenir l'interaction du champ électromagnétique et du champ de gravitation, nous resterons dans le cadre de la relativité restreinte.

Signalons enfin que nous avons tenté d'appliquer au champ électromagnétique la méthode utilisée par M^r Lichnerowicz pour le champ de gravitation [12]. Cette tentative n'a malheureusement pas abouti au succès.

Nous allons maintenant exposer brièvement le formalisme de Bogolioubov.

1. **Formalisme de Bogolioubov & Stepanov.** — Etudions un processus au com-

mencement et à la fin duquel il n'y a que des particules très éloignées les unes des autres et que l'on peut considérer comme libres. Longtemps avant que l'interaction ne joue un rôle appréciable, l'état du champ est représenté par un vecteur d'état (ou amplitude d'état) $\Phi(-\infty)$.

S'il n'y avait pas d'interaction, le système resterait indéfiniment dans l'état représenté par $\Phi(-\infty)$. Mais, sous l'influence des interactions entre particules, le système — le champ — va changer d'état : certaines particules subiront une modification de leur impulsion-énergie, tandis que d'autres seront créées ou annihilées. Lorsque l'interaction sera redevenue négligeable, le système sera dans un état représenté par l'amplitude d'état $\Phi(+\infty)$.

La « matrice $\mathbf{S}$ » ou matrice de collision est définie par la relation

$$(VI.3) \quad \Phi(+\infty) = \mathbf{S} \Phi(-\infty).$$

On considère parfois que l'interaction est rigoureusement nulle longtemps avant et longtemps après l'intervalle de temps pendant lequel elle est complètement « branchée ». On dit alors que l'on « branche » ou « débranche » adiabatiquement l'interaction.

Pour décrire mathématiquement ces opérations fictives, Bogolioubov introduit une fonction $g(x)$ définie dans l'espace-temps et prenant ses valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$. $g(x)$ caractérise l'intensité de l'interaction. Dans les régions où $g(x) = 0$, l'interaction est débranchée et l'on a affaire à des champs libres. Dans les régions où $g(x) = 1$, l'interaction est complètement branchée. Enfin, dans les régions où $0 < g(x) < 1$, l'interaction n'est que partiellement branchée.

Supposons maintenant que $g(x)$ diffère de 0 seulement dans un domaine fini d'espace-temps. Les champs peuvent alors être considérés comme libres dans un passé et un avenir suffisamment lointains. Les états initial et final du système peuvent alors être représentés par les amplitudes d'état définies en théorie des champs libres. Nous désignerons par $\Phi = \Phi(-\infty)$ le vecteur d'état initial et nous poserons, $\Phi(+\infty)$ étant l'état final,

$$(VI.4) \quad \Phi(+\infty) = \mathbf{S}(g) \Phi.$$

On considère $\mathbf{S}(g)$ comme la matrice de collision correspondant au cas d'une interaction branchée avec une intensité g . Le cas réel, où l'interaction est toujours et partout branchée, correspond au cas où $g(x) = 1$ dans tout l'espace-temps.

La matrice $\mathbf{S}$ habituelle peut donc s'écrire $\mathbf{S} = \mathbf{S}(1)$.

Trois conditions physiques très générales — covariance relativiste, unitarité, causalité — permettent de déterminer la matrice $\mathbf{S}(g)$. En remplaçant le lagrangien réel d'interaction $\mathcal{L}(x)$ par le produit $\mathcal{L}(x) g(x)$, on décrit une interaction fictive, « branchée avec l'intensité $g(x)$ ». A cette interaction fictive correspond une matrice de collision $\mathbf{S}(g)$ que l'on peut mettre sous la forme

$$(VI.5) \quad \mathbf{S}(g) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \mathbf{S}_n(x_1, \dots, x_n) g(x_1) \dots g(x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Les $\mathbf{S}_n(x_1, \dots, x_n)$ sont des expressions opératorielles dépendant des fonctions de champ et de leurs dérivées partielles aux points $x_1, \dots, x_n$. Les $\mathbf{S}_n(x_1, \dots, x_n)$ sont des fonctions symétriques de leurs arguments $x_1, \dots, x_n$, puisque les fonctions $g(x_1), \dots, g(x_n)$ interviennent d'une manière symétrique dans la relation de définition (VI.5).

Les trois conditions physiques générales énoncées précédemment, jointes au principe de correspondance, permettent de montrer que les $S_n(x_1, \dots, x_n)$ peuvent se mettre sous la forme

$$(VI.6) \quad S_n(x_1, \dots, x_n) = i^n T[\mathcal{L}(x_1) \dots \mathcal{L}(x_n)],$$

$\mathcal{L}(x)$ étant le lagrangien d'interaction et T désignant le produit chronologique de $\mathcal{L}(x_1), \dots, \mathcal{L}(x_n)$, c'est-à-dire le produit habituel de ces opérateurs pris dans un ordre tel que les composantes de temps des arguments des facteurs décroissent de la gauche vers la droite ; on a, par définition,

$$(VI.7) \quad T[\mathcal{L}(x_1) \dots \mathcal{L}(x_n)] \equiv \mathcal{L}(x_{j_1}) \dots \mathcal{L}(x_{j_n}),$$

où la suite $x_{j_1}, \dots, x_{j_n}$ est telle que $x_{j_1}^0 \geq \dots \geq x_{j_n}^0$.

Pour le détail des calculs et des raisonnements nécessaires pour démontrer (VI.6), nous renverrons à [10].

2. Application à l'électromagnétisme non linéaire. — Pour appliquer la méthode de Bogolioubov aux théories électromagnétiques du type Born & Infeld, on peut remplacer dans le lagrangien $L(F, G, \beta)$ la constante de self-interaction β par l'expression $\beta g(x)$, $g(x)$ étant la fonction introduite par Bogolioubov pour caractériser l'interaction fictive. Pour $g(x) = 0$, on a un champ libre maxwellien ; pour $g(x) = 1$, l'interaction est « complètement branchée ».

L'expression $L(F, G, \beta g(x))$ peut se développer en série de puissances de $\beta g(x)$; on a, L_{Max} désignant le lagrangien de Maxwell,

$$(VI.8) \quad L(F, G, \beta) = L_{\text{Max}} + \sum_{n=1}^{\infty} L_n(F, G) [\beta g(x)]^n.$$

Le premier terme peut être traité comme un terme de champ libre obéissant à des équations linéaires, les termes suivants comme un lagrangien de self-interaction

$$(VI.9) \quad L_{\text{int}} = \sum_{n=1}^{\infty} L_n(F, G) [\beta g(x)]^n.$$

On sait que β , s'il est différent de 0, doit avoir une valeur extrêmement faible. Jusqu'à ce jour, aucune expérience concluante, du moins à notre connaissance, n'a pu mettre en évidence l'effet de diffusion de la lumière par elle-même. Aussi sera-t-il légitime de se borner, dans (VI.9), au premier terme $L_1(F, G) \beta g(x)$; ceci sera d'autant plus légitime que, si l'on veut appliquer cette méthode à un cas concret, on sera inévitablement amené à faire d'autres approximations qui introduisent des erreurs bien plus importantes. D'après (VI.6), les S_n seront donc nés par la formule

$$(VI.10) \quad S_n(x_1, \dots, x_n) = i^n \beta^n T\{L_1[F(x_1), G(x_1)] \dots L_1[F(x_n), G(x_n)]\}.$$

La petitesse de β laisse espérer que, dans ce cas, la matrice S converge. Il est même possible que l'on puisse se limiter, avec une bonne approximation, au terme en S_1 pour les applications à un cas concret donné.

Il m'est agréable d'exprimer ici ma respectueuse reconnaissance à M^{me} M.-A. Tonnelat qui, par ses conseils et ses encouragements, m'a guidé dans ce travail avec beaucoup de bienveillance.

Je tiens aussi à exprimer ma sincère reconnaissance à M^r Lichnerowicz.

Je remercie M^{me} Choquet-Bruhat d'avoir si aimablement accepté de faire partie du jury.

RÉFÉRENCES

- [1] M. BORN & L. INFELD, *Proc. Royal Soc. [A]*, t. **144**, 1934, p. 425.
- [2] M.-A. TONNELAT, La théorie du champ unifié d'Einstein-Schrödinger et quelques-uns de ses développements, éd. Gauthier-Villars, Paris, 1954, ch. VI, p. 90 et suiv.
- [3] H. KREMER, *Boletim Univ. Paraná*, n° 4, novembre 1962.
- [4] J. LAMEAU, *C. r. Ac. Sc.*, t. **254**, 1962, p. 829.
- [5] J. LAMEAU, *C. r. Ac. Sc.*, t. **245**, 1957, p. 2208 et t. **246**, 1958, p. 1384.
- [6] E. BLANCHETON, Thèse, Caen, 1961.
- [7] A. BROTA, *C. r. Ac. Sc.*, t. **255**, 1962, p. 1871.
- [8] G. MIE, *Ann. Physik*, t. **37**, 1912, p. 511 ; t. **39**, 1912, p. 1 et t. **40**, 1913, p. 1.
- [9] B. HOFFMANN & L. INFELD, *Phys. Review*, t. **51**, 1937, p. 765.
- [10] N. N. BOGOLIUBOV & D. V. SHIRKOV, Introduction to the theory of quantized fields, éd. Interscience Publ., London, 1959.
- [11] S. N. GUPTA, *Proc. phys. Soc. [A]*, t. **65**, 1952, p. 608.
- [12] A. LICHNEROWICZ, Publ. Inst. Hautes Etudes Scient., n° 10, 1961.

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

« Connexions finslériennes »

Vu et approuvé :

Paris, le 8 avril 1964

Le Doyen de la Faculté des Sciences

Marc ZAMANSKY

Vu et Permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris.

Jean ROCHE

FRIEDEL	T Physique des solides (Orsay).	CHEVAUGEON	T Botanique (Orsay).
M. JULIA	T Etudes des Moléculaires complexes.	KAHANE	T Mathématiques (Orsay).
LENDER	T Biol. Animale SPCN (Orsay).	SAMUEL	T Mathématiques ENS féminines.
MAGAT	T Physico-Chimie des radioéléments.	KOURGANOFF	T Astronomie (Orsay).
M ^{lle} QUINTIN	T Electrochimie.	THIERY	T Mécanique céleste.
MONOD	T Chimie du métabolisme.	ABELES	T Physique SPCN.
BENOIT	T Physiol. animale (Orsay).	AMAT	T Physique PCB.
DE POSSEL	T Analyse numérique.	AUBOIN	T Géologie.
CHARLOT	T Chimie analytique.	M ^{me} BENOIT-GUEUTAL	T Phys. Nucléaire et radioactivité (Orsay).
LEMÉE	T Ecologie Vég. (Orsay).	BOUGIS	T Biologie marine (Villefranche/Mer).
GUÉRIN	T Chimie MPC (Orsay).	BRUHAT	T Mathématiques MPC.
CHATELET M.	T Chimie PCB.	BRUNN	T Géologie historique (Orsay).
JEAN	T Physique Nucl. (Orsay).	CHABBAL	T Physique MGP (Orsay).
MATTLER	T Physique SPCN.	DEHEUVELS	T Mathématique Propé.
BERGERARD	T Zoologie (Orsay).	D'ESPAGNAT	T Physique théorique (Orsay).
BERTIN	T Electronique (Orsay).	FURON	T Géologie SPCN.
BOUSSIÈRES	T Radiochimie.	M ^{me} GANS	T Génétique.
M ^{me} COUTURE	T Thermo. et Méca. Physique.	GENEVES	T Biologie végétale PCB.
ELLENBERGER	T Géologie des grandes régions du globe.	GUILBERT	T Physique (CUS Orléans).
FRANC	T Biologie animale PCB.	HUPE	T Pétrographie.
SCHNELL	T Botanique tropicale.	HOLLANDE	T Biologie générale.
STOLKOWSKI	T Physiologie végétale.	LIONS	T Analyse numérique.
ACHER	T Chimie Biologique.	MAITTE	T Chimie PCB.
BAUDOIN	T Biologie animale PCB.	MEYER	T Physique propédeutique.
BEAUMONT	T Biologie animale SPCN.	NICOLAS	T Géologie appliquée.
BLAMONT	T Géophysique-ionosphère.	PANIGEL	T Biologie générale.
BOURREAU	T Botanique.	RAVIER	T Pétrographie.
CURIE D.	T Physique MGP.	ROSEAU	T Méca. théor. des fluides.
DURAND-DELGA ..	T Géologie.	ROUBINE	T Electronique.
FREON	T Chimie organique (Orsay).	SILBER	T Chimie PCB.
HELLER	T Physiol. végétale.	UEBERSFELD	T Electronique.
TORTRAT	T Calcul des Probabilités.	YVON	T Théories Physiques.
CAILLEUX	T Géologie SPCN.	HERVE	T Mathématiques.
MAGNAN	T Physique SPCN.	NERON	T Mathémat. MPC (Orsay).
DAUDEL	T Mécanique ondulatoire appl. à la chimie Théor. et à la Phys. Nucléaire.	M ^{me} PECKER-WIMEL	T Astrophysique.
M ^{lle} FOURCROY	T Biologie végét. SPCN.	BALKANSKY	T Physique MPC.
M ^{me} CHOQUET-BRUHAT	T Mécan. Analytique et Méca. céleste.	LE CORRE	T Electricité.
M ^{lle} VEIL	T Physiologie générale.	DELCROIX	T Physique théorique (Orsay).
LWOFF	T Microbiologie.	GOURDIN	T Phys. Théor. des Hautes-Energies (Orsay).
SIESTRUNCK	T Mécan. Phys. et Expér. im.	LEHMANN	T Phys. Exp. des Hautes Energies (Orsay).
LACOMBE	T Métallurgie des métaux Nucléaires (Orsay).	NATAF	T Physique nucléaire et radioactivité (Orsay).
BROCHARD	T Physique PCB (Orsay).	ECHALIER	T Biologie animale PCB.
CABANNES	T Mécanique générale.	BARRAUD	T Physiologie cellulaire.
LESIEUR	T Mathématiques I (Orsay).	LIORET	T Physiologie végét. Orsay.
MAZET	T Méca. générale (Orsay).	DARS	T Géologie struc. et Géol. appliquée.
CAIRE	T Géographie phys. et Géol. Dynamique.	CAMEFORT	T Botanique (agrégation).
COMOLET	T Mécanique des Fluides.	VICHNIEWSKY	T Mécanique industrielle.
CORABEUF	T Physiol. animale (Orsay).	BLAQUIÈRE	T Electronique (Orsay).
DELLOUE	T Physique de l'exosphère.	ARNOUS	T Physique théorique.
GORENFLOT	T Botanique II (Orsay).	TATIBOUET	T Chimie (CSU Orléans).
HOULLON	T Biologie animale PCB.	MALLIAVIN	T Mathématique propé. Orsay.
JULIEN J.	T Chimie SPCN (Orsay).	GAUDEMAR	T Chimie Propé.
MALGRANGE	T Technique Math. de la Physique (Orsay).	PEREZ Y JORBA	T Phys. Exp. des Hautes énergies (Orsay).
OLIVIER	T Anthropologie.	DAVID	T Chimie (Agrég. Orsay).
NOZERAN	T Botanique II (Orsay).	BROUSSE	T Mécanique théorique.
BLANC-LAPIERRE ..	T Phys. ENS (Orsay).	RÖSCH	T Astronomie

Le Secrétaire Général..... R. POULLAIN.

